

Erwartungswert & Varianz Übungsblatt

1. Ein Casino bietet folgendes Spiel an: Eine Münze wird solange geworfen, bis Kopf erscheint. Falls das bereits beim ersten Wurf der Fall ist, bezahlt das Casino dem Spieler 1 Fr., falls erst beim zweiten Wurf Kopf erscheint, erhält der Spieler 2 Fr., beim dritten Wurf 4 Fr., beim vierten Wurf 8 Fr. usw. Das Casino zahlt aber höchstens 100 Fr. aus. Welchen Einsatz muss das Casino mindestens verlangen, damit es langfristig keinen Verlust erleidet?
2. Eine Firma verkauft elektronische Bauteile, die zu 95% einwandfrei sind. Ist ein Bauteil defekt, so erhält der Kunde so lange kostenlos weitere Bauteile, bis eines einwandfrei ist. Zu welchem Preis muss die Firma die Bauteile anbieten, wenn die Herstellungskosten 1 Fr. pro Stück betragen und die Firma pro Verkauf einen Gewinn von 0.40 Fr. erzielen will?
Hinweis: Verwende $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = 1/(1-q)^2$ ($0 \neq |q| < 1$).
3. Ein blindes Huhn möchte im Dunkeln eine Tür aufschliessen. Am Schlüsselbund hängen 5 Schlüssel, die es zufällig nacheinander ausprobiert. X sei die Anzahl Schlüssel, die ausprobiert werden, bis der richtige gefunden ist. Bestimme den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz $\text{Var}(X)$.
4. Die amerikanische Armee führte während des zweiten Weltkriegs im grossen Stil Bluttests durch. Da (bei einem bestimmten Test) nur $p = 2\%$ aller Blutproben positiv reagierten, wurde von 10 Einzelproben jeweils die Hälfte zu einer Sammelprobe zusammengefasst und zunächst diese „gepoolte“ Probe getestet. Falls das Resultat negativ ausfiel, genügte dieser eine Test. Andernfalls wurden alle 10 übriggebliebenen Hälften einzeln getestet.
 - (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test der Sammelprobe negativ ausfällt?
Hinweis: Nimm an, dass die Einzelproben unabhängig sind.
 - (b) Sei X die Anzahl benötigter Untersuchungen für 10 Blutproben. Welche Werte kann X annehmen, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?
 - (c) Wie viele Analysen werden „im Durchschnitt“ für 10 Proben benötigt? Wie viele Analysen werden durch die Bildung von Sammelproben im Mittel eingespart?
 - (d) Berechne die Varianz und die Standardabweichung von X .