



Mathematik-Matura 6Gi 2005

Hinweise: Die Aufgaben haben gleiches Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Verwende bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Als Hilfsmittel zugelassen sind ein einzeiliger Taschenrechner sowie eine DMK-Formelsammlung ohne eigene Zusätze. Zeit: 4 Std. Viel Erfolg!

1. Kurvendiskussion

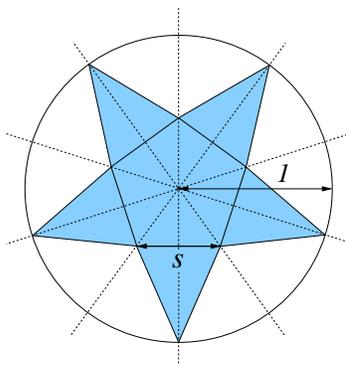
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 2}{9(x-3)^2}.$$

- (a) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Symmetrien, Singularitäten, Null- und Polstellen jeweils mit Angabe ihrer Art, Asymptoten, Extrema, Wendepunkte mit Steigungen der Wendetangenten). Skizziere den Funktionsgraphen samt allen Asymptoten.
- (b) Schraffiere in deiner Skizze eine Fläche vom Inhalt $A = -\frac{8}{9} \int_1^{\frac{7}{3}} \frac{3x-7}{(x-3)^2} dx$, und berechne diesen.

2. Extremalaufgabe

Aus einem Kreis vom Radius 1 soll – wie in der Abbildung dargestellt – das Netz einer geraden regulären Fünfeckspyramide ausgeschnitten werden.



Wie gross muss die Länge s der Grundkante gewählt werden, damit die Pyramide ihr maximales Volumen besitzt?

Hinweise: Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat das Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot Gh$. Maximiere V^2 anstelle von V ! Runde auf 3 zählende Ziffern.

3. Newtonverfahren und Rotationsvolumen

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}(e^x - 2).$$

- (a) Bestimme das (einzige) Minimum der Funktion auf Tausendstel genau.
- (b) Der Graph der Funktion rotiere zwischen den Nullstellen um die x -Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers wiederum auf Tausendstel genau.

4. **Kombinatorik**

Wörter, die aus den gleichen Buchstaben bestehen, welche aber in unterschiedlichen Reihenfolgen angeordnet sind, nennt man *Anagramme*. Beispiele sind etwa „Integral“ und „Triangel“ oder „Schachspielen“ und „Schnapsleiche“.

- (a) Wie viele verschiedene – allenfalls auch sinnlose - Anagramme können mit den Buchstaben des Wortes „Besenstiel“ gebildet werden?
- (b) Die über 300 000 verschiedenen Anagramme werden in alphabetischer Reihenfolge notiert. An welcher Stelle steht dann das Wort „Liebesnest“?

5. **Satz von Bayes**

In einer Kasse liegen n Münzen. Eine der Münzen zeigt beidseitig „Kopf“, die übrigen Münzen sind ideale Münzen mit „Kopf“ auf der einen Seite und „Zahl“ auf der anderen. Eine Münze wird zufällig ausgewählt und k -mal geworfen. Sie zeigt k -mal „Kopf“.

In den folgenden Teilaufgaben interessiert jeweils die Wahrscheinlichkeit $P[SM|K \dots K]$, dass es sich bei der ausgewählten Münze um die Spezialmünze handelt.

- (a) Gib die gesuchte Wahrscheinlichkeit für $n = 1000$ Münzen und $k = 10$ Würfe an.
- (b) Rechne mit einer beliebigen Anzahl Münzen n und wieder mit $k = 10$ Würfeln. Stelle die interessierende Wahrscheinlichkeit gegenüber der Anzahl Münzen graphisch dar. Ab welcher Anzahl Münzen beträgt die Wahrscheinlichkeit höchstens noch 10%?
- (c) Rechne wiederum mit $n = 1000$ Münzen aber mit einer beliebigen Anzahl Würfe k . Stelle die interessierende Wahrscheinlichkeit gegenüber der Anzahl Würfe graphisch dar. Ab welcher Anzahl Würfe beträgt die Wahrscheinlichkeit mindestens 90%?

6. **Drei unabhängige Kurzaufgaben**

- (a) Bestimme eine ganzrationale Funktion dritten Grades

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

welche die x -Achse im Ursprung berührt und im Punkt $P(2/0)$ unter einem Winkel von 60° schneidet.

- (b) Sei $X \sim \text{Bin}(n = 4, p = \frac{1}{5})$. Gib die Verteilung von X^2 sowie $E[X^2]$ und $\text{Var}(X^2)$ an.
- (c) Andrea und Claudia spielen ein Geschicklichkeitsspiel. Andrea behauptet, sie gewinne eine einzelne Spielrunde mit der Wahrscheinlichkeit 75%. Nach Claudias Meinung ist diese Schätzung zu hoch; sie möchte daher Andreas Behauptung mit einem Test widerlegen. Von 20 gespielten Runden gewinnt Andrea nun deren 13. Wie entscheidet Claudias Test auf dem 5%-Niveau?