



## Mathematik-Matura 6Gfg 2004

*Hinweise:* Die Aufgaben haben gleiches Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Verwende bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Als Hilfsmittel zugelassen sind ein einzeiliger Taschenrechner sowie eine beliebige Formelsammlung ohne eigene Zusätze. Zeit: 4 Std. Viel Erfolg!

### 1. *Kurvendiskussion*

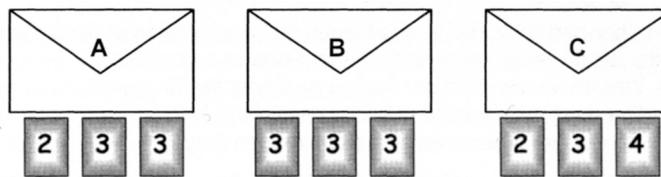
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2 - 2}.$$

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Symmetrien, Singularitäten, Null- und Polstellen jeweils mit Angabe ihrer Art, Asymptoten, Extrema, Wendepunkte mit Steigungen der Wendetangenten). Skizziere den Funktionsgraphen samt allen Asymptoten.

### 2. *Wahrscheinlichkeit I: Baumdiagramm*

In drei identischen Briefumschlägen stecken je drei Karten mit je einer Ziffer darauf (siehe Abbildung).



Ein Umschlag wird zufällig ausgewählt. Diesem werden ebenfalls zufällig zwei Karten entnommen. Die Zufallsvariable  $X$  bezeichne das Produkt der beiden Zahlen auf den ausgewählten Karten.

- Illustriere das Zufallsexperiment durch einen geeigneten Baum und beschrifte diesen vollständig.
- Bestimme die Verteilung von  $X$ , und zeichne das Stabdiagramm.
- Berechne den Erwartungswert  $E(X)$ , die Varianz  $\text{Var}(X)$  und die Standardabweichung  $\sigma(X)$ .
- Angenommen, das Produkt sei genau 6. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde in diesem Fall Umschlag A ausgewählt? Verwende eine korrekte Bezeichnung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit!

### 3. *Rotationskörper*

Der Graph der Funktion  $f(x) = a\sqrt{x}$  rotiert um die  $x$ -Achse und bildet dabei einen (liegenden) Becher.

- Der Inhalt des Bechers bis zur „Höhe“  $x = 10 \text{ cm}$  betrage  $V = 3 \text{ dl}$ . Bestimme den Parameter  $a$ .

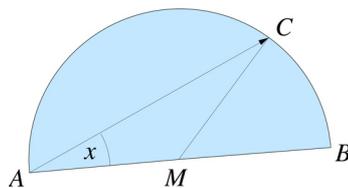
(b) Berechne nun mit der Formel

$$S = 2\pi \int_0^{10} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

die Oberfläche  $S$  des Bechers.

#### 4. *Newtonverfahren*

Eine Schwimmerin durchquert einen halbkreisförmigen Pool auf geradem Weg von  $A$  nach  $C$ . Ihr gleichzeitig in  $A$  startender Freund läuft mit dreifacher Geschwindigkeit um den Pool herum via  $B$  nach  $C$ . Beide treffen gleichzeitig in  $C$  ein. Wie gross ist der Winkel  $x$ ?



Reche im Bogenmass, und gib dann das Resultat im Gradmass auf Grade genau an.

#### 5. *Wahrscheinlichkeit II: Binomialverteilung*

Ein Kleintheater mit 25 Plätzen macht die Erfahrung, dass etwa 10% der reservierten Karten an der Abendkasse nicht abgeholt werden.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Theater voll, wenn 25 Karten im Vorverkauf reserviert worden sind und an der Abendkasse nur reservierte Karten verkauft werden?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man an der Abendkasse noch 3 Karten kaufen, wenn im Vorverkauf 25 Karten reserviert worden sind und vor Aufführungsbeginn die nicht abgeholt Karten verkauft werden?
- Um bei einer teuren Theateraufführung möglichst alle Plätze zu verkaufen, nimmt das Theater 27 Reservationen entgegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden Leute mit reservierten Karten keinen Platz?

#### 6. *Flächenbestimmung mit Differential- und Integralrechnung*

Der Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$$

schneidet die  $x$ -Achse in  $x_1 = 2$  und  $x_2 = -2$ , und besitzt die Asymptote  $g : y = -1$ .

- Bestimme  $a$ ,  $b$  und  $c$ , und skizziere anschliessend (ohne weitere Kurvendiskussion) den Graphen der Funktion.
- Berechne den Flächeninhalt, welcher vom Graphen und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird.  
*Hinweis:* Starte mit der Polynomdivision  $f(x) = (\dots) : (x^2 + 1) = \dots$
- Zwei Ecken eines Rechtecks liegen auf der Asymptote  $g$  und zwei weitere auf dem Funktionsgraphen. Bestimme den maximalen Flächeninhalt so eines Rechtecks.