



Mathematik-Matura 6Gc 2008

Hinweise: Die Aufgaben haben gleiches Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Verwende bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Als Hilfsmittel zugelassen sind ein einzeiliger Taschenrechner sowie eine DMK-Formelsammlung ohne eigene Zusätze. Zeit: 4 Std. Viel Erfolg!

1. **Kurvendiskussion**

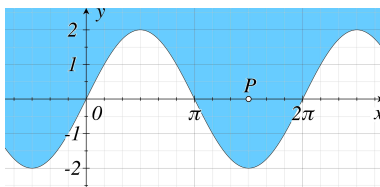
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7}{2x + 1}.$$

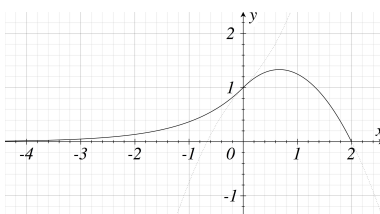
- Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Null- und Polstellen jeweils mit Angabe ihrer Art, gerade und krummlinige Asymptoten, Extrema, Wendepunkte mit Steigungen der Wendetangenten). Skizziere den Funktionsgraphen samt allen Asymptoten.
- Schraffiere in der Skizze die Fläche zwischen dem Graphen von f , der Asymptote und den beiden Vertikalen $x = 1$ und $x = 4$. Berechne den Inhalt dieser Fläche.

2. **Extremalaufgabe und Newtonverfahren**

Der Küstenverlauf am trigonischen Meerbusen im Fürstentum Winkelstein kann durch die Kurve $y = 2 \sin x$ beschrieben werden. Gesucht ist ein Küstenpunkt $Q(x/y(x))$ mit minimaler Distanz zu dem im Punkt $P(\frac{3}{2}\pi/0)$ vertäuten Boot.



- Zeige, dass die x -Koordinate des gesuchten Punktes Q eine Nullstelle der Funktion $f(x) = 4 \sin 2x + 2x - 3\pi$ ist. Fülle dazu das Lot von P auf die Küstenlinie, oder minimiere das Quadrat $d^2(x)$ des Abstandes $\overline{PQ}$.
- Beginne mit dem Startwert $x_0 = 3.5$, und bestimme einen Punkt Q mit Hilfe des Newtonverfahrens auf Tausendstel genau.

3. **Flächeninhalt und Rotationsvolumen**

Die Abbildung zeigt den Graphen einer abschnittsweise definierten Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Die beiden Teilgraphen gehen bei $(0/1)$ glatt (d. h. „ohne Knick“) ineinander über.

- Bestimme die Koeffizienten a , b und c der Parabel.
- Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse.
- Die Kurve rotiere um die x -Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

4. *Stochastik I: Wahrscheinlichkeiten und Satz von Bayes*

Eine elektronische Mailbox enthält neben einigen nützlichen Nachrichten zu $P[S] = 90\%$ unerwünschte Werbemails (Spam).

- (a) Von den Werbemails enthalten $P[C|S] = 30\%$ das Wort „Casino“ und $P[V|S] = 45\%$ das Wort „Viagra“. Der Anteil an Spam, welcher beide Wörter gleichzeitig enthält, sei vernachlässigbar klein. Berechne die Wahrscheinlichkeit $P[C \cup V|S]$, dass eine Spammail mindestens eines der beiden Wörter enthält.
- (b) Seriöse Mails enthalten die beiden Wörter unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $P[C|\bar{S}] = 1\%$ und $P[V|\bar{S}] = 0.5\%$. Berechne die exakte Wahrscheinlichkeit $P[C \cup V|\bar{S}]$, dass eine seriöse Mail mindestens eines der beiden Wörter enthält.
- (c) Stelle die in (a) und (b) berechneten Wahrscheinlichkeiten in einem geeigneten Baum zusammen, beschrifte diesen korrekt, und bestimme dann auf Hundertstelprozent genau die Wahrscheinlichkeit $P[S|C \cup V]$, dass eine neu eintreffende Mail, welche mindestens eines der beiden Wörter „Casino“ oder „Viagra“ enthält, zum Spam gehört. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P[\dots | \dots]$ ist eine neue Mail ohne diese beiden Wörter unerwünschte Werbung?

5. *Stochastik II: Verteilungen und statistisches Testen*

Eveline und Christoph spielen Ping Pong. Eveline gewinnt ein einzelnes Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $p_0 = 25\%$. Ein Unentschieden ist nicht möglich.

- (a) Eveline und Christoph spielen drei Spiele hintereinander. Wer ein Spiel gewinnt, erhält einen Punkt. Für zwei unmittelbar nacheinander gewonnene Spiele wird jeweils ein Zusatzpunkt vergeben. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl Punkte von Eveline nach Abschluss aller Spiele. Bestimme den Erwartungswert und die Varianz von X .
- (b) Eveline und Christoph spielen vier Turniere zu je neun Spielen. In einem Turnier gewinnt, wer mehr als die Hälfte der Spiele für sich entscheiden kann. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Eveline mindestens einmal Turniersiegerin?
- (c) Eveline trainiert nun während sieben Jahren und behauptet, dadurch sei ihre Gewinnwahrscheinlichkeit p gestiegen. Christoph zweifelt dies an und verlangt einen Test auf dem Niveau $\alpha = 5\%$ mit 25 Einzelspielen. Wie oft muss Eveline mindestens gewinnen, um Christoph zu überzeugen?
- (d) Angenommen, Eveline hat durch das Training ihre Siegeswahrscheinlichkeit tatsächlich auf $p_A = 60\%$ steigern können, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass der obige Test die Nullhypothese auch wirklich verwirft?

6. *Drei unabhängige Kurzaufgaben*

- (a) Integriere partiell.

$$\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$$

- (b) Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

$$\begin{cases} 9 \cdot 3^{x-2} &= 9^{y-1} \\ 4^{x-3} &= 4 \cdot 2^{y-3} \end{cases}$$

- (c) Bestimme die beiden Schnittpunkte und die zugehörigen Schnittwinkel der Kurven

$$k_1 : y = 2\sqrt{2x-6} \quad \text{und} \quad k_2 : y = (x-3)\sqrt{2x-6}.$$