

Mathematik-Matura 4Wab 2002

Hinweise: Die Aufgaben haben gleiches Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Verwende aber bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Als Hilfsmittel zugelassen sind ein einzeiliger Taschenrechner sowie die gelbe Formelsammlung. Es werden nur die *fünf* bestgelösten Aufgaben gewertet. Zeit: $3\frac{1}{4}$ Std. Viel Erfolg!

1. Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{4x^2}.$$

- Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Symmetrien, Singularitäten, Null- und Polstellen jeweils mit Angabe ihrer Art, Asymptoten, erste drei Ableitungen, Extrema, Wendepunkte mit Steigungen der Wendetangenten). Skizziere den Graphen von f samt allen Asymptoten.
- Berechne den Inhalt der von $y = f(x)$, $y = g(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$ und der x -Achse berandeten Fläche.
- In welchem Punkt besitzt die Kurve $y = f(x)$ eine Tangente der Steigung $\frac{3}{2}$? Bestimme (nur) die x -Koordinate eines Berührungspunktes mit dem Newtonverfahren auf Hundertstel genau.

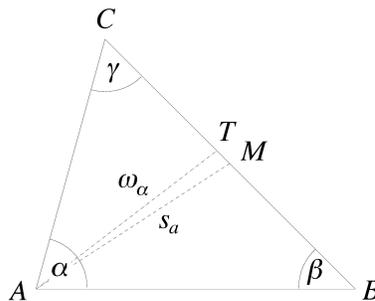
2. Abstände

Gegeben seien die Punkte $A(1/9/0)$, $B(3/7/-1)$, $C(-1/-1/-2)$ und $D(7/3/6)$.

- Gib eine Parametergleichung der Geraden $g = AB$ und eine Koordinatengleichung der Ebene E durch g und den Punkt C an.
- Welchen Abstand besitzt der Punkt D von der Ebene E ?
- Zeige, dass das Dreieck CPD für jeden Punkt $P \in g$ gleichschenkelig ist.
- Bestimme den Punkt $P \in g$ so, dass das Dreieck CPD (bei P) rechtwinklig ist.

3. Trigonometrie

Im Dreieck ABC bezeichnen ω_α die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels α und s_a die Länge der Schwerlinie zur Seite a .



- Zeige, dass $\overline{CT} : \overline{TB} = \sin \beta : \sin \gamma$.
- Berechne s_a bei $\gamma = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$ und $\omega_\alpha = 8 \text{ cm}$.

4. Reflexion an der Kugel

Eine Lichtquelle $L(20/24/8)$ sendet einen Lichtstrahl in Richtung von $P(18/22/7)$ aus. Der Lichtstrahl wird an der Kugel $K : x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 10z - 31 = 0$ reflektiert.

- Bringe die Kugelgleichung auf die Form $(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2$.
- Berechne die Koordinaten des Reflexionspunktes R .
Lösung (zum Weiterrechnen): $R(2/6/-1)$
- Gib eine Parametergleichung des reflektierten Lichtstrahls an.
- Bestimme den Winkel zwischen dem einfallenden und dem reflektierten Lichtstrahl.

5. Rotationskörper

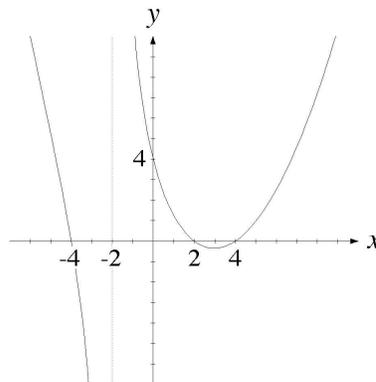
Betrachte die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)} e^x.$$

- Bestimme die Nullstellen sowie das (einzige) Maximum von f . Auf die Berechnung der zweiten Ableitung darf verzichtet werden.
- Skizziere den Graphen von f .
- Die Kurve $y = f(x)$ rotiert um die x -Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

6. Vier unabhängige Kurzaufgaben

- Gib die Gleichung der gebrochen rationalen Funktion mit dem abgebildeten Graphen an:



- Stelle die Gleichung der kubischen Parabel auf, welche die x -Achse im Ursprung berührt und im Punkt $P(3/0)$ einen Steigungswinkel von 45° besitzt.
- Berechne $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.
- Berechne die Länge der Kurve $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ zwischen $x = -1$ und $x = +1$.