

Mathematik-Matura 4Tb 2003

Hinweise: Die Aufgaben haben gleiches Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Der TI-89 darf jedoch erst eingesetzt werden, wenn die Aufgaben 1–3 im verschlossenen Umschlag abgelegt worden sind. Als Hilfsmittel zugelassen sind zudem die gelbe Formelsammlung, eine kurze handgeschriebene Zusammenfassung sowie ein einzeliger Taschenrechner ohne CAS. Es werden nur *fünf* Aufgaben gewertet; eine Aufgabe nach Wahl ist deutlich zu streichen. Verwende bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Zeit: $3\frac{1}{4}$ Stunden. Viel Erfolg!

1. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3}.$$

- Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Symmetrien, Singularitäten, Null- und Polstellen jeweils mit Angabe ihrer Art, Asymptoten, erste drei Ableitungen, Extrema, Wendepunkte mit Steigungen der Wendetangenten). Skizziere den Graphen von f samt seinen Asymptoten.
- Berechne den Inhalt der vom Funktionsgraphen und der x -Achse berandeten Fläche.

2. *Exponentialfunktionen*

- Bestimme mit dem Newtonverfahren eine Lösung der Gleichung $x \cdot e^{1-x} = \frac{1}{e}$ auf Hundertstel genau.
- Bestimme den Flächeninhalt der Figur, welche durch die Kurve $y = x \cdot e^{1-x}$, die x -Achse und nach rechts durch die Senkrechte $x = 3$ begrenzt wird.
- Die Kurve $y = x \cdot e^{1-x}$ rotiert im ersten Quadranten um die x -Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.
- Suche die Lösung der separierbaren Differentialgleichung $y' = y \cdot e^{1-x}$, welche durch den Punkt $P(1/e)$ verläuft.

3. *Vektorgeometrie*

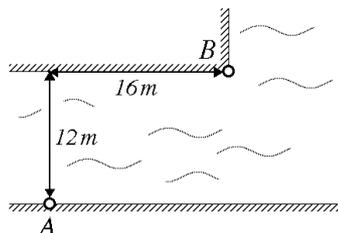
Die Punkte $A(13/9/0)$, $B(5/1/4)$, $C(-3/5/-4)$ und D bilden die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Spitze S .

- Berechne die Koordinaten des Punktes D .
- Das Volumen der Pyramide betrage 720. Berechne die Koordinaten der Spitze S .
Lösung (zum Weiterrechnen): $S(10/-3/-12)$
- Unter welchem Winkel schneidet die Kante \overline{AS} die Grundfläche?
- Ein von $L(12/-20/27)$ ausgehender Lichtstrahl wird an der Seitenfläche BCS im Punkt $R(4/1/-4)$ reflektiert. In welchem Punkt T trifft der reflektierte Strahl auf die yz -Ebene?

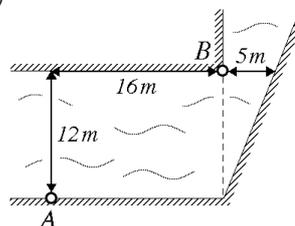
4. **Extremalaufgabe (mit TI-89)**

Freund A möchte so schnell wie möglich übers Wasser zu Freundin B gelangen. Seine Fortbewegungsgeschwindigkeit beträgt im Wasser schwimmend $v_s = 1 \frac{m}{s}$ und am Ufer laufend $v_l = 8 \frac{m}{s}$. Beschreibe jeweils den *schnellsten* Weg von A nach B .

(a)



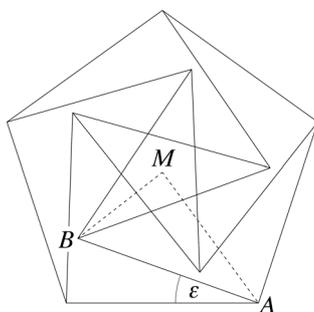
(b)



(c) Stelle – in einem einzigen Stichwort – einen Bezug zur Physik her.

5. **Trigonometrie (mit TI-89)**

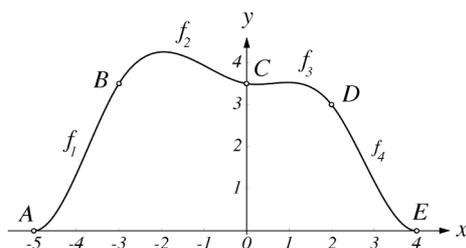
Die Figur ist aus lauter Strecken gleicher Länge aufgebaut. Bestimme den Winkel ε .



Hinweis: Verwende den Cosinussatz im Dreieck AMB .

6. **Eingespannte kubische Splines (mit TI-89)**

Antoine de Saint-Exupéry stellt sich einen Elefanten, der gerade von einer Boa Constrictor verspeist worden ist, ungefähr so vor:



Die Kontur der Schlange setzt sich abschnittsweise aus den kubischen Parabeln f_1, \dots, f_4 – sogenannten Splines – zusammen. An den inneren Nahtstellen $B(-3/3\frac{1}{2})$, $C(0/3\frac{1}{2})$ und $D(2/3)$ besitzen zwei benachbarte Funktionen jeweils gleiche Steigungen sowie gleiche Krümmungen. Die Steigungen von f_1 und f_4 sind Null in den Endpunkten $A(-5/0)$ bzw. $E(4/0)$. Bestimme die Funktionsgleichungen von f_1, \dots, f_4 .

Hinweise: Die Aufgabe führt auf ein umfangreiches Gleichungssystem. Beim Lösen mit dem TI-89 dürfen die (vom System reservierten) Variablennamen c1 bis c99 nicht verwendet werden.