KANTISARGANS
KANTONSSCHULE

Mathematik-Matura 4SWb 2006

Hinweise: Die Aufgaben haben alle dasselbe Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Es werden nur *fünf* Aufgaben gewertet; eine Aufgabe nach Wahl ist deutlich zu streichen. Als Hilfsmittel zugelassen sind eine Formelsammlung ohne eigene Ergänzungen sowie ein nicht graphikfähiger Taschenrechner ohne CAS. Verwende bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Zeit: $3\frac{1}{4}$ Stunden. Viel Erfolg!

1. ***Kurvendiskussion***

   Gegeben sei die Funktion
   $$f(x) = \frac{(x-1)^3 - 2}{(x-2)^2}\,.$$

   (a) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Symmetrien, Singularitäten, Null- und Polstellen jeweils mit Angabe ihrer Art, Asymptoten, Extrema, Wendepunkte mit Steigungen der Wendetangenten). Skizziere den Graphen von f samt seinen Asymptoten.

   (b) Berechne den Inhalt der (endlichen) Fläche, welche vom Funktionsgraphen, von der schiefen Asymptote und von der Geraden $x = 5$ berandet wird.

2. ***Vektorgeometrie I (Grundaufgaben)***

   Gegeben seien die Punkte $A(3/2/4)$, $B(5/6/0)$ und $C(6/2/8)$.

   (a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C.

   (b) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

   (c) Berechne den Winkel $\alpha = \sphericalangle CAB$ (auf Bogenminuten genau).

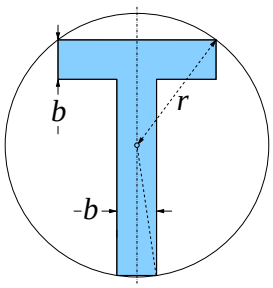
   (d) Ermittle eine Parametergleichung der Winkelhalbierenden ω_α.

   (e) Gib eine Parametergleichung der Schwerlinie s_c sowie die Koordinaten des Schwerpunkts S des Dreiecks ABC an.

   (f) Der Punkt $Z(1/1/1)$ sei die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABC. Bestimme ihr Volumen.

3. ***Extremalaufgabe***

   In einen Kreis vom Radius $r = 10$ soll ein Buchstabe **T** mit der Balkenbreite $b = 2$ und grösstmöglichem Flächeninhalt eingepasst werden:



   Welchen Anteil der Kreisfläche nimmt der Buchstabe ein? Runde auf Zehntelprozent.

4. ***Vektorgeometrie II (Kugeln)***

Gegeben seien die Ebene $E: x-2y-3z-16=0$, der Punkt $P(5/-1/z_P)$ in der Ebene E, die Kugel $K: x^2+y^2+z^2+10x-14y-6z+d=0$ und der Punkt $Q(-3/1/7)$ auf der Kugel K.

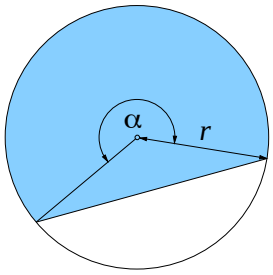
(a) Gib die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r der Kugel K an.

(b) Bestimme eine Gleichung der Tangentialebene E_T im Punkt Q der Kugel.

(c) Suche die Gleichung einer Kugel K', welche einerseits die Ebene E im Punkt P und andererseits die Kugel K berührt.
Hinweis: Skizziere zuerst das entsprechende zweidimensionale Problem.

5. ***Trigonometrie und Newtonverfahren***

Das Bogenmass des Zentriwinkels α in der abgebildeten Figur sei x.



(a) Zeige, dass für den Flächeninhalt des markierten Kreissegments gilt:

$$A(x)=\frac{1}{2}r^2(x-\sin x)$$

(b) Bei welchem Winkel α bedeckt das Kreissegment 70% der Kreisfläche? Gib den Winkel auf ein Grad genau an.

6. ***Flächen- und Rotationsintegrale***

Betrachte die Funktion

$$f(x)=e^x.$$

(a) Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0,1]$.

(b) Die Fläche aus Teilaufgabe (a) rotiere um die x-Achse. Gib das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers an.

(c) Stelle die Gleichungen der beiden Tangenten an den Graphen von f in den beiden (Kurvenpunkten über den) Intervallgrenzen auf.

(d) Berechne den Flächeninhalt des Gebiets, welches vom Graphen und den beiden Tangenten eingeschlossen wird.

Th. Grischott, 6. Juni 2006