

Mathematik-Matura 4P 2008
Schwerpunktfach

Hinweise: Die Aufgaben haben gleiches Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Es werden nur *fünf* Aufgaben gewertet; eine Aufgabe nach Wahl ist deutlich zu streichen. Verwende bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Als Hilfsmittel zugelassen sind ein CAS-fähiger Graphikrechner sowie eine DMK-Formelsammlung ohne eigene Zusätze. Zeit: 2 Std. Viel Erfolg!

1. Axonometrie

Ein Häuschen mit Garage ist gegeben durch seinen Grundriss $A(0/0/0)$, $B(4/0/0)$, $C(4/-4/0)$, $D(10/-4/0)$, $E(10/10/0)$, $F(0/10/0)$ und das Dach $G(0/0/8)$, $H(4/0/8)$, $I(4/-4/4)$, $J(10/-4/4)$, $K(10/5/13)$, $L(10/10/8)$, $M(0/10/8)$, $N(0/5/13)$.

Das Haus soll so parallel auf eine $x'y'$ -Ebene (durch den Ursprung) projiziert werden, dass die Punkte B , F und G auf die Bildpunkte $B'(16/4)$, $F'(-50/20)$ und $G'(0/48)$ abgebildet werden.

- (a) Gib die (2×3-)Abbildungsmatrix P der Parallelprojektion an.
- (b) Berechne die Bilder aller Punkte, und skizziere das projizierte Bild des Hauses.

Hinweise: Schreibe die (Ortsvektoren aller) Urbilder als Spalten in eine Matrix.
Skizziere im Bereich $-50 \leq x' \leq 60$, $-10 < y' < 100$.

2. Komplexe Zahlen

Gib alle Lösungen der Gleichung

$$(z^{10} + 2z^5 + 1)[z^3 - (2 \operatorname{cis} 57^\circ)^2] = 0$$

in Polarform an, und stelle sie in der Gauss'schen Zahlenebene als Punkte dar.

3. Stochastik I: Regression und Korrelation

Die beiden Tabellen zeigen die Entwicklung der Sprint-Weltrekordzeiten über 100 m (ohne Egalisierungen) seit 1950 für Frauen

x_i^f	1952	1955	1961	1965	1968	1973	1973	1983	1984	1988	1988
y_i^f	11.4	11.3	11.2	11.1	11.0	10.9	10.8	10.79	10.76	10.61	10.49

und für Männer:

x_j^m	1956	1960	1968	1983	1988	1991	1991	1994	1996	1999	2005	2007	2008
y_j^m	10.1	10.0	9.95	9.93	9.92	9.90	9.86	9.85	9.84	9.79	9.77	9.74	9.72

Berechne sowohl für die Frauen als auch für die Männer eine Regressionsgerade, und gib jeweils auch die Korrelation an. In welchem Jahr würden im linearen Modell die Frauen die Männer einholen? Dokumentiere und kommentiere dein Vorgehen.

4. *Stochastik II: Maximum-Likelihood-Schätzung und Satz von Bayes*

- (a) Der gut vorbereitete Schüler G bearbeitet in einer Mathematikprüfung 8 gleich schwierige Aufgaben und löst sie unabhängig voneinander je mit der Wahrscheinlichkeit p_G . Schätze den Parameter p_G mit der Maximum-Likelihood-Methode, wenn der Schüler genau 7 Aufgaben lösen kann. Dokumentiere deine Rechnungen!
- (b) Im Mittel sind 90% der Kandidaten, die zu Mathematikprüfungen antreten, so gut vorbereitet, dass sie jede Aufgabe mit der Wahrscheinlichkeit p_G aus Teilaufgabe (a) lösen können. Schlecht vorbereitete Schüler hingegen können die Aufgaben je nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_S = \frac{1}{4}$ lösen. Schüler X löst nun von den 8 Aufgaben genau deren 5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat X sich gut vorbereitet?

5. *Stochastik III: Statistische Tests und eine „Konfidenzgrenze“*

Zwei Piraten würfeln. Pirat A , der Eigentümer des Würfels, behauptet, sein Würfel sei fair, und insbesondere betrage die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, $p_0 = \frac{1}{6}$. Pirat B bezweifelt diesen Wert. Um ihre Meinungsverschiedenheit zu klären, würfeln die beiden Piraten 200mal und zählen dabei 29mal eine Sechs.

- (a) Pirat B meint nun, $\frac{29}{200}$ liege deutlich unter $\frac{1}{6}$, und verprügelt A mit seinem Holzbein. Zu recht? Prüfe mit einem zweiseitigen Test auf dem Niveau $\alpha = 5\%$, ob der Ausgang des Experiments nicht doch mit A s Wahrscheinlichkeit vereinbar ist. Gib die Hypothesen, den Annahmehbereich und die Entscheidung des Tests an.
- (b) Pirat B vermutet, die Wahrscheinlichkeit p_0 betrage in Wirklichkeit $\frac{1}{8}$. Überprüfe auch diesen Wert mit einem gleichartigen Test.
- (c) Gib auf Zehntelprozent genau die *kleinste* Wahrscheinlichkeit p_0 an, die als Nullhypothese eines zweiseitigen Tests zum Niveau $\alpha = 5\%$ beibehalten würde.

6. *Differentialgleichungen*

Löse die folgenden Gleichungen und Anfangswertprobleme.

(a) $y' = 2y + 3x$

(b) $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 15y'' + 4y' + 20y = 0$

(c) $y' = x^3 e^{-y}$ mit $y(0) = \frac{1}{2}$

(d) $\begin{cases} y'_1 &= -4y_1 + 2y_2 \\ y'_2 &= -9y_1 + 7y_2 \end{cases}$ mit $\underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$