

Mathematik-Matura 4NP 2008 Grundlagenfach

Hinweise: Die Aufgaben haben alle dasselbe Gewicht und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Es werden nur *fünf* Aufgaben gewertet; eine Aufgabe nach Wahl ist deutlich zu streichen. Als Hilfsmittel zugelassen sind eine Formelsammlung ohne eigene Ergänzungen sowie ein nicht graphikfähiger Taschenrechner ohne CAS. Verwende bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. Zeit: $3\frac{1}{4}$ Stunden. Viel Erfolg!

1. *Kurvendiskussion*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{(x-1)^2}.$$

- (a) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (Symmetrien, Singularitäten, Null- und Polstellen jeweils mit Angabe ihrer Art, Asymptoten, Extrema, Wendepunkte mit Steigungen der Wendetangenten). Skizziere den Graphen von f samt seinen Asymptoten.
- (b) Berechne den Inhalt der Fläche, welche rechts von der Geraden $x = 3$ liegt und vom Funktionsgraphen und der schiefen Asymptote berandet wird.

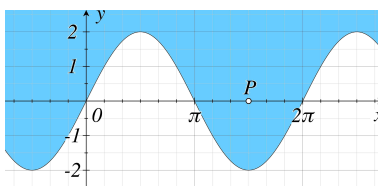
2. *Vektorgeometrie I*

Gegeben sind die drei Punkte $A(5/2 \mid -1)$, $B(3/6 \mid 3)$ und $D(1 \mid -2/1)$ sowie die Ebene $E: 2x + y - 12 = 0$.

- (a) Zeige, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ normal stehen und gleiche Beträge haben.
- (b) Bestimme einen Punkt C , sodass $ABCD$ ein Quadrat ist.
- (c) Verifiziere, dass A und B Punkte der Ebene E sind. Beschreibe die spezielle Lage der Ebene E in Worten.
- (d) Das Quadrat $ABCD$ ist Grundfläche einer senkrechten Pyramide mit der Spitze S in der Ebene E . Bestimme S und das Volumen der Pyramide.
- (e) Berechne den Winkel ε zwischen der Grund- und einer Seitenfläche der Pyramide.
- (f) Suche den Mittelpunkt U und den Radius r der Umkugel K der Pyramide $ABCD$, und gib die Gleichung von K an.

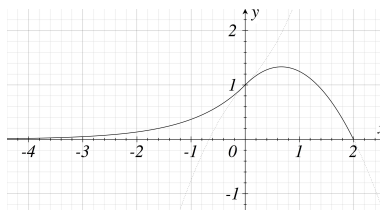
3. *Extremalaufgabe und Newtonverfahren*

Der Küstenverlauf am trigonischen Meerbusen im Fürstentum Winkelstein kann durch die Kurve $y = 2 \sin x$ beschrieben werden. Gesucht ist ein Küstenpunkt $Q(x/y(x))$ mit minimaler Distanz zu dem im Punkt $P(\frac{3}{2}\pi/0)$ vertäuten Boot.



- (a) Zeige, dass die x -Koordinate des gesuchten Punktes Q eine Nullstelle der Funktion $f(x) = 4 \sin 2x + 2x - 3\pi$ ist. Fälle dazu das Lot von P auf die Küstenlinie, oder minimiere das Quadrat $d^2(x)$ des Abstandes PQ .
- (b) Beginne mit dem Startwert $x_0 = 3.5$, und bestimme einen Punkt Q mit Hilfe des Newtonverfahrens auf Tausendstel genau.

4. *Flächeninhalt und Rotationsvolumen*



Die Abbildung zeigt den Graphen einer abschnittsweise definierten Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Die beiden Teilgraphen gehen bei $(0/1)$ glatt (d. h. „ohne Knick“) ineinander über.

- (a) Bestimme die Koeffizienten a , b und c der Parabel.
- (b) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse.
- (c) Die Kurve rotiere um die x -Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

5. *Vektorgeometrie II*

Gegeben sind die Kugel K mit Mittelpunkt $M(1/1/2)$ und Radius $r = 7$ und die Gerade g durch die Punkte $A(3/1/6)$ und $B(-5/7/10)$.

- (a) Bestimme die Schnittpunkte der Geraden g mit der Kugel K .
- (b) Berechne den Abstand des Kugelmittelpunktes M von der Geraden g .
- (c) Gib die Parametergleichung der zu g parallelen Geraden g' an, welche die Kugel K berührt und von g den kleinstmöglichen Abstand besitzt.

6. *Unabhängige Kurzaufgaben*

- (a) Integriere, und vereinfache gegebenenfalls so weit wie möglich.

$$(i) \int_0^{\sqrt{2}} e^x(x^2 - 2) dx \quad (ii) \int \frac{4x^2 + 3x - 1}{x^3 - 3x + 2} dx$$

- (b) Bestimme die folgenden Grenzwerte.

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$$

- (c) Beweise mit vollständiger Induktion, dass $n^5 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar ist.