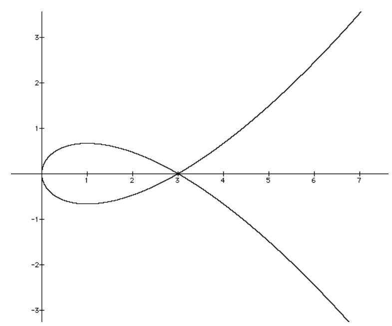
KANTISARGANS
KANTONSSCHULE

Maturitätsprüfungen
Lösungen der Vorbereitungsaufgaben GLF Mathematik

1. Schnittpunkt $S(x/y)$: $\frac{1}{x} = \sqrt{x^2 - 2}$, also $\frac{1}{x^2} = x^2 - 2$ und $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ (biquadratische Gleichung, Substitution $u = x^2$). $u^2 - 2u - 1 = 0$, also $u = 1 + \sqrt{2}$, $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ (kein Schnittpunkt mit $x < 0$). Schnittwinkel φ: $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, $g'(x) = x(x^2-2)^{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}} = \frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2} = -\frac{1}{f'(x)}$. Daraus folgt $\varphi = 90°$.

2. (a) $y = \pm\sqrt{x}(1 - \frac{x}{3}) = \pm(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}})$, also $y' = \pm\frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) = 0$ für $x = 1$. $y(1) = \pm\frac{2}{3}$. $y'' = \mp\frac{1}{4}(x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$, $y''(1) = \mp\frac{1}{2}$: Hochpunkt $H(1/\frac{2}{3})$, Tiefpunkt $T(1/-\frac{2}{3})$.

   (b) Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$, keine Wendepunkte:



   (c) $A = 2\int_0^3 (x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}})\,dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^3 = \frac{8}{5}\sqrt{3} \approx 2.77$.
   $b = 2\int_0^3 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = 2\int_0^3 \sqrt{1 + (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = 2\int_0^3 \sqrt{(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx$
   $= 2\int_0^3 (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}})\,dx = 2[x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^3 = 4\sqrt{3} \approx 6.93$.

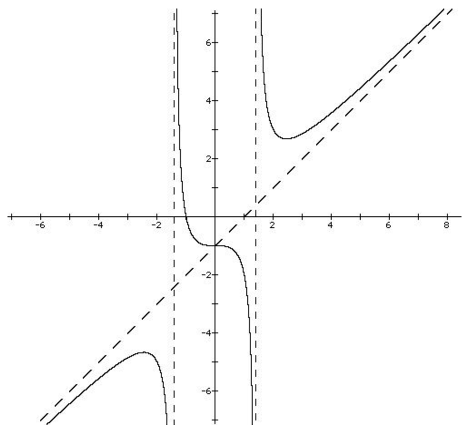
3. (a) Aus Skizze: Kreismittelpunkt $M(4/v)$ und $v^2 = \overline{MB}^2 = 4^2 + (8-v)^2$ (Pythagoras). Also $v\ (= r) = 5$, Kreisgleichung $k:\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$. Parabel $p:\ y = a(x-4)^2$, $C \in p:\ 8 = a(0-4)^2$, also $a = \frac{1}{2}$ und $p:\ y = \frac{1}{2}(x-4)^2$.

   (b) Steigung $m_{CM} = -\frac{3}{4}$, also Kreissteigung $-\frac{1}{m_{CM}} = \frac{4}{3}$ im Punkt C. Parabelsteigung $y'(0) = \frac{1}{2}\cdot 2(0-4) = -4$. Schnittwinkel $\varphi = 180° - [\arctan\frac{4}{3} - \arctan(-4)] \approx 50°54'$.

   (c) Die mittlere Teilfigur A_2 besteht aus einem Kreissektor ($A_{KS} = 5^2\pi\cdot\frac{2\arctan\frac{4}{3}}{360°} \approx 23.2$) und einem „oben eingekerbten Parabelsegment" ($A_{PS} = 8^2 - \int_0^8 \frac{1}{2}(x-4)^2\,dx - \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3$ $= 64 - [\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(x-4)^3]_0^8 - 12 = 30\frac{2}{3}$). $A_2 = A_{KS} + A_{PS} \approx 53.8$. Äussere Teilfiguren: $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}(5^2\pi - A_2) \approx 12.3$.

4. Informative Skizze: *Diagonal*schnitt durch das Prisma (Rechteck; Länge $\sqrt{2}\,a$, Diagonale $2r$). Prismenhöhe $h = h(a) = \sqrt{4r^2 - 2a^2}$, Prismenoberfläche: $A = A(a) = 2a^2 + 4ah$. $A'(a) = 4a + 4(1\cdot h + a\cdot h') = 4[a + h + a\,\frac{1}{2\sqrt{4r^2-2a^2}}\cdot(-4a)] = 4(a + h - \frac{2a^2}{h}) = 0$, wenn $\frac{2a^2}{h} - a - h = 0$ (quadratische Gleichung in a, negative Lösung unbrauchbar), also wenn $a = \frac{1+\sqrt{1+8}}{\frac{4}{h}} = h = \sqrt{4r^2 - 2a^2}$ (Würfel!), bzw. $a^2 = 4r^2 - 2a^2$, also Kantenlänge $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$. Prismenvolumen $V = a^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}r^3$, Kugelvolumen $V_K = \frac{4}{3}r^3\pi$ und $V : V_K = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \approx 36.8\%$.

5. (a) $f(x) = \frac{x^3-x^2+2}{x^2-2} = \frac{(x+1)(x^2-2x+2)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$ (im Zähler Nullstelle -1 abspalten), $f'(x) = \frac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2}$, $f''(x) = \frac{4x(x^2+6)}{(x^2-2)^3}$. Punktsymmetrie mit Zentrum $Z(0/-1)$, denn $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2} - 1$ und $g(x) = \frac{x^3}{x^2-2}$ ungerade; einfache Nullstelle $x_1 = -1$; Polstellen erster Ordnung $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$; keine Singularitäten. Vertikale Asymptoten mit VZW bei $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$; schiefe Asymptote $y = x - 1$, denn $f(x) = (x^3 - x^2 + 2) : (x^2 - 2) = x - 1 + \frac{2x}{x^2-2}$ (Polynomdivision).
$f'(x) = 0$ bei $x_4 = 0$ und bei $x_{5,6} = \pm\sqrt{6}$; x_4: Wendepunkt $W(0/-1)$, da x_4 Nullstelle mit VZW von $g(x)$; $x_{5,6}$: $f''(\pm\sqrt{6}) = \pm\frac{3}{4}\sqrt{6}$, also Hochpunkt $H(-\sqrt{6}/-\frac{3}{2}\sqrt{6}-1)$, Tiefpunkt $T(\sqrt{6}/\frac{3}{2}\sqrt{6}-1)$. Graph:



(b) $\int \frac{x^3-x^2+2}{x^2-2}\,dx = \int (x - 1 + \frac{2x}{x^2-2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|u| + c$ $= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x^2-2| + c$

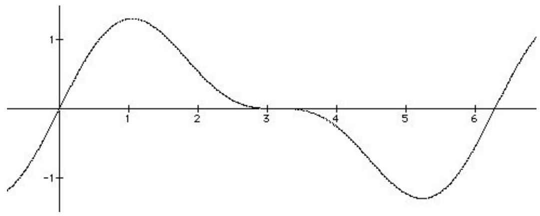
(c) $A = |\int_{-1}^{0} f(x)\,dx| = |[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x^2-2|]_{-1}^{0}| = |\ln 2 - \frac{3}{2}| = \frac{3}{2} - \ln 2 \approx 0.807$

6. (a) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) = \sin x + \frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x = \sin x(1+\cos x) = 0$ bei $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$. $f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x)\cdot 2 = \cos x + \cos(2x) = \cos x + cos^2 x - 1 = 0$ bei x_2, $x_4 = \frac{\pi}{3}$, $x_5 = \frac{5\pi}{3}$ (Substitution $u = \cos x$ führt auf $2u^2+u-1 = 2(u+1)(u-\frac{1}{2})$; $u_1 = -1$, $u_2 = \frac{1}{2}$). $f''(x) = -\sin x - \sin(2x)\cdot 2 = -\sin x - 2\cdot 2\sin x\cos x = -\sin x(1+4\cos x) = 0$ bei $x_1, x_2, x_3, x_6 = \arccos(-\frac{1}{4}) \approx 1.82$, $x_7 = 2\pi - x_6 \approx 4.46$. $f'''(x) = -\cos x - 4\cos(2x)$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	Beschreibung
0	0	2	0	-5	$N_1(0/0)$, W_1 mit $m_t = 2$
π	0	0	0	-3	$N_2(\pi/0)$, W_2 mit $m_t = 0$ (Terrassenpkt.)
2π	0	2	0	-5	$N_3(2\pi/0)$, W_3 mit $m_t = 2$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	0	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$		$H(\frac{\pi}{3}/\frac{3}{4}\sqrt{3})$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3}{4}\sqrt{3}$	0	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$		$T(\frac{5\pi}{3}/-\frac{3}{4}\sqrt{3})$
1.82	0.726	-1.13	0	3.75	$W_4(1.82/0.726)$ mit $m_t = -1.13$
4.46	-0.726	-1.13	0	3.75	$W_5(4.46/-0.726)$ mit $m_t = -1.13$

(N: Nullstelle; W: Wendepunkt; H: Hochpunkt, lokales Maximum; T: Tiefpunkt, lokales Minimum; m_t: Steigung der (Wende-)Tangente)

(b)



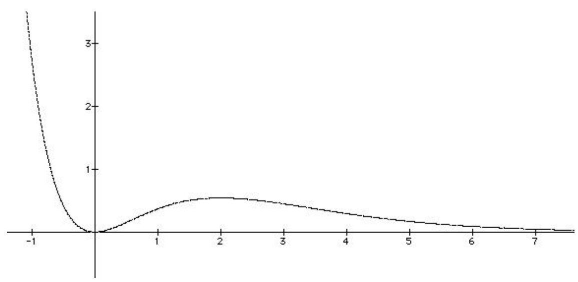
(c) $A = 2\int_0^\pi [\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)]\,dx = 2[-\cos x - \frac{1}{4}\cos(2x)]_0^\pi = 2[(1-\frac{1}{4}) - (-1-\frac{1}{4})] = 4$

7. (a) $f(x) = x^2e^{-x} = 0$ bei $x_1 = 0$. $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x-x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x} = 0$ bei $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. $f''(x) = (2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x} = (x^2-4x+2)e^{-x} = 0$ bei $x_{3,4} = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2} = 2\pm\sqrt{2}$. $f'''(x) = (2x-4)e^{-x} - (x^2-4x+2)e^{-x} = (x^2-6x+6)e^{-x}$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	Beschreibung
0	0	0	2		$N(0/0)$, T
2	0.541	0	-0.271		$H(0/0.541)$
$2-\sqrt{2}$	0.191	0.461	0	-1.57	$W_1(0.586/0.191)$ mit $m_t = 0.461$
$2+\sqrt{2}$	0.384	-0.159	0	0.0931	$W_2(3.41/0.384)$ mit $m_t = -0.159$

(N: Nullstelle; T: Tiefpunkt, lokales Minimum; H: Hochpunkt, lokales Maximum; W: Wendepunkt; m_t: Steigung der (Wende-)Tangente)

(b) Wegen $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0$ ist die x-Achse horizontale Asymptote:



(c) $\int x^2{}_\downarrow e^{-x}{}_\uparrow\,dx = -x^2e^{-x} + \int 2x_\downarrow e^{-x}{}_\uparrow\,dx$
$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c = -(x^2+2x+2)e^{-x} + c$

(d) Schnittpunkte: $x^2e^{-x} = e^{-x}$, also $(x^2-1)e^{-x} = 0$ und $x = \pm 1$
$A = \int(e^{-x} - x^2e^{-x})\,dx = [-e^{-x} - (x^2+2x+2)]_{-1}^1 = [(x^2+2x+1)e^{-x}]_{-1}^1 = \frac{4}{e} \approx 1.47$

(e) $A_{\text{links}} = \int_{-1}^0 (e^{-x} - x^2e^{-x})\,dx = [(x^2+2x+1)e^{-x}]_{-1}^0 = 1$
$A_{\text{links}} : A_{\text{rechts}} = 1 : (\frac{4}{e} - 1) = e : (4-e) \approx 2.12 : 1$

(f) (I) $x^2e^{-x} = \frac{a}{x^2}$, also $a = x^4e^{-x}$. Aus (II) $(2x-x^2)e^{-x} = -\frac{2a}{x^3}$ folgt damit $(2x-x^2)e^{-x} = -2xe^{-x}$, also $2x - x^2 = -2x$, $4x - x^2 = x(4-x) = 0$. $x = 4$, $a = 4^4e^{-4} \approx 4.69$ und Berührpunkt $B(4/0.293)$. ($x_1 = 0$ ist uninteressant, da dann $a = 0$ und $k_2 : y = 0$.)

8. Halbkreisgleichungen: $y = R\pm\sqrt{x^2-r^2}$. $V_{\text{rot}} = \pi\int_{-r}^r [(R+\sqrt{x^2-r^2})^2 - (R-\sqrt{x^2-r^2})^2]\,dx$
$= \pi\int_{-r}^r 4R\sqrt{x^2-r^2}\,dx = 4R\pi\int_{-r}^r \sqrt{x^2-r^2}\,dx = 4R\pi\cdot\frac{1}{2}r^2\pi = 2Rr^2\pi^2$

9. Zylindermittelpunkt $M(3.5/3/2)$, $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, Zylinderachse $a : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, Ebene $E \perp a$ durch A : $x + 2y - 2z - 12 = 0$, Grundkreismittelpunkt $M'(\frac{38}{9}/\frac{40}{9}/\frac{5}{9})$ als Durchstosspunkt $a \cap E$ (mit $t = \frac{13}{18}$), Grundkreisradius $r = \overline{AM'} = \frac{13}{3}\sqrt{2}$, Zylinderhöhe $h = \overline{M'M} = \frac{13}{3}$, Volumen $V = (\frac{13}{3}\sqrt{2})^2\pi\cdot\frac{13}{3} = 2\pi(\frac{13}{3})^3 \approx 511$.

10. (a) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6+1 \\ -2+3 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -32 \end{pmatrix}$, $E : x + y - 4z = 0$, HNF$(E) : \frac{x+y-4z}{3\sqrt{2}} = 0$, M in HNF(E) einsetzen liefert $r_1 = 3\sqrt{2}$, Kugel $K_1 : (x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 18$. $B_1M : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $B_1(5/-1/1)$ als Durchstosspunkt $B_1M \cap E$ (mit $t = 1$).

(b) $E_h \perp h$ durch $M : 2x + 2y + z - 9 = 0$, $B_2(2/2/1)$ als Durchstosspunkt $E_h \cap h$ $(t = 1)$, $r_2 = \overline{B_2M} = 6$, Mittelpunkt des Schnittkreises k ist $M_k(5/-1/1) = B_1$, Radius $r_k = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$.

(c) Öffnungswinkel $\alpha = 90°$, da $r_1 = r_k$.

11. (a) $\sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(b,c) = \sphericalangle(a,c) = \arccos \frac{8}{9} \approx 27°16'$.

(b) $E_1 \perp b$ durch $A : 2x + y + 2z - 8 = 0$, $S_1(\frac{16}{9}/\frac{8}{9}/\frac{16}{9})$ als Durchstosspunkt $E_1 \cap b$ (mit $t = \frac{8}{9}$). $E_2 \perp c$ durch $S_1 : 2x + 2y + z - \frac{64}{9} = 0$, $S_2(\frac{128}{81}/\frac{128}{81}/\frac{64}{81})$ als Durchstosspunkt $E_2 \cap c$ (mit $t = (\frac{8}{9})^2$).

(c) $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$,

$\overline{AS_1} = \overline{OA} \cdot \sin \sphericalangle(a,b) = \overline{OA} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \sphericalangle(a,b)} = \overline{OA} \cdot \sqrt{1 - (\frac{8}{9})^2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{17}}{9} = \frac{1}{3}\sqrt{17}$,

$\overline{S_1S_2} = \overline{OS_1} \cdot \sin \sphericalangle(b,c) = \overline{OA} \cdot \cos \sphericalangle(a,b) \sin \sphericalangle(b,c) = \frac{8}{27}\sqrt{17}$,

$$\begin{aligned}\overline{S_2S_3} = \overline{OS_2} \cdot \sin \sphericalangle(a,c) &= \overline{OS_1} \cdot \cos \sphericalangle(b,c) \sin \sphericalangle(a,c) \\ &= \overline{OA} \cdot \cos \sphericalangle(a,b) \cos \sphericalangle(b,c) \sin \sphericalangle(a,c) = \frac{64}{243}\sqrt{17}.\end{aligned}$$

$(\overline{AS_1}, \overline{S_1S_2}, \overline{S_2S_3}, \ldots)$ bilden eine geometrische Folge mit $a_1 = \frac{1}{3}\sqrt{17}$ und $q = \frac{8}{9}$.

(d) $l = \frac{1}{3}\sqrt{17} \cdot \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 3\sqrt{17}$

(e) $l_n = \frac{1}{3}\sqrt{17} \cdot \frac{1-(\frac{8}{9})^n}{1-\frac{8}{9}} = 3\sqrt{17}\,[1 - (\frac{8}{9})^n] > \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{17}$, sobald $1 - (\frac{8}{9})^n > \frac{1}{2}$, also $(\frac{8}{9})^n < \frac{1}{2}$ bzw. $n > \frac{\ln 2}{\ln 9 - \ln 8} \approx 5.88$. Nach 6 Teilstrecken ist die Hälfte des Fadens versponnen.

12. (a) $\overrightarrow{NA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $NA : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_E = \overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $E : x + y + 2z - 2 = 0$, Reflexionspunkt $R(\frac{4}{5}/\frac{2}{5}/\frac{2}{5})$ als Durchstosspunkt $NA \cap E$ (mit $t = -\frac{1}{5}$). Lot $l \perp E$ durch $A : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, Durchstosspunkt $l \cap E$ bei $t = \frac{1}{6}$, Spiegelbild $A'(\frac{4}{3}/\frac{1}{3}/\frac{2}{3})$ von A an E. $RA' : \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{8}{15} \\ -\frac{1}{15} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$, Ebene $ABFE : x = 1$, Austrittspunkt $P(1/\frac{3}{8}/\frac{1}{2})$ als Durchstosspunkt $RA' \cap ABFE$ (mit $t = \frac{3}{8}$).

(b) Da die Kugel alle drei Rissebenen berührt, gilt Mittelpunkt $M_K(r,r,r)$ mit Radius r. HNF$(E) : \frac{x+y+2z-2}{\sqrt{6}} = 0$, M_K in HNF(E) eingesetzt liefert $\frac{r+r+2r-2}{\sqrt{6}} = \pm r$, also folgt $r_{1,2} = \frac{2}{4 \mp \sqrt{6}} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$. r_1 ist unbrauchbar, weil $> \frac{1}{2}$. Also gilt $r = r_2 = \frac{4-\sqrt{6}}{5} \approx 0.310$.