Bündner Kantonsschule

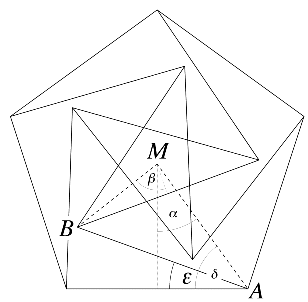
Maturitätsprüfungen
Lösungen der Vorbereitungsaufgaben GF Mathematik

1. AF: $(a_n) = (a, a+d, a+2d, a+3d)$, GF: $(g_n) = (a+1, a+d+3, a+2d+13, a+3d+47)$.
Bedingungen für GF: $g_2 : g_1 = g_3 : g_2 = g_4 : g_3$, also (I) $g_1 g_3 = g_2^2$ und (II) $g_2 g_4 = g_3^2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a+1)(a+2d+13) & = & (a+d+3)^2 \\ (a+d+3)(a+3d+47) & = & (a+2d+13)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} d^2+4d-4 & = & 8a \\ d^2-4d+28 & = & 24a \end{array} \right.$$

3(I)−(II): $2d^2 + 16d - 40 = 2(d-2)(d+10) = 0$, also $d = 2$. ($d = -10$ ist nicht brauchbar, da dann $(g_n) = (8, 0, 0, 24)$ keine GF ist.) $a = 1$, $(a_n) = (1, 3, 5, 7)$ und $(g_n) = (2, 6, 18, 54)$.

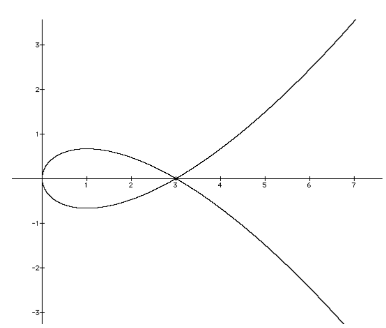
2. $\alpha = 36°$, $\beta = 72°$, $\delta = 54°$, Kantenlänge $\overline{AB}$ sei 1 (beliebig anzunehmen).



$\sin\alpha = \frac{1}{2\overline{MA}}$, also $\overline{MA} = \frac{1}{2\sin\alpha}$. $\sin\beta = \frac{1}{2\overline{MB}}$, also $\overline{MB} = \frac{1}{2\sin\beta}$. Cosinussatz im $\triangle AMB$:
$\overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{MA}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{MA}\cdot\cos\sphericalangle MAB$, $\frac{1}{4\sin^2\beta} = 1 + \frac{1}{4\sin^2\alpha} - 2\cdot\frac{1}{2\sin\alpha}\cdot\cos\sphericalangle MAB$.
Daraus folgen $\sphericalangle MAB = \arccos(\sin\alpha + \frac{1}{4\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{4\sin^2\beta})$ und $\varepsilon = \delta - \sphericalangle MAB \approx 22.28°$.

3. Schnittpunkt $S(x/y)$: $\frac{1}{x} = \sqrt{x^2-2}$, also $\frac{1}{x^2} = x^2 - 2$ und $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ (biquadratische Gleichung, Substitution $u = x^2$). $u^2 - 2u - 1 = 0$, also $u = 1 + \sqrt{2}$, $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ (kein Schnittpunkt mit $x < 0$). Schnittwinkel φ: $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, $g'(x) = x(x^2-2)^{-\frac{1}{2}}$
$= \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}} = \frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2} = -\frac{1}{f'(x)}$. Daraus folgt $\varphi = 90°$.

4. (a) $y = \pm\sqrt{x}(1 - \frac{x}{3}) = \pm(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}})$, also $y' = \pm\frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) = 0$ für $x = 1$. $y(1) = \pm\frac{2}{3}$.
$y'' = \mp\frac{1}{4}(x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$, $y''(1) = \mp\frac{1}{2}$: Hochpunkt $H(1/\frac{2}{3})$, Tiefpunkt $T(1/-\frac{2}{3})$.
(b) Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$, keine Wendepunkte:



(c) $A = 2\int_0^3 (x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}})\,dx = 2\,[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}]_0^3 = \frac{8}{5}\sqrt{3} \approx 2.77$.
$b = 2\int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\int_0^3 \sqrt{1 + (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = 2\int_0^3 \sqrt{(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx$
$= 2\int_0^3 (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}})\,dx = 2[x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^3 = 4\sqrt{3} \approx 6.93$.

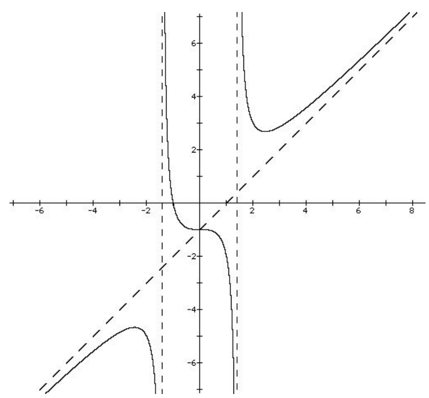
5. (a) Aus Skizze: Kreismittelpunkt $M(4/v)$ und $v^2 = \overline{MB}^2 = 4^2 + (8-v)^2$ (Pythagoras). Also $v\ (= r) = 5$, Kreisgleichung $k:\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$. Parabel $p:\ y = a(x-4)^2$, $C \in p:\ 8 = a(0-4)^2$, also $a = \frac{1}{2}$ und $p:\ y = \frac{1}{2}(x-4)^2$.

   (b) Steigung $m_{CM} = -\frac{3}{4}$, also Kreissteigung $-\frac{1}{m_{CM}} = \frac{4}{3}$ im Punkt C. Parabelsteigung $y'(0) = \frac{1}{2} \cdot 2(0-4) = -4$. Schnittwinkel $\varphi = 180° - [\arctan \frac{4}{3} - \arctan(-4)] \approx 50°54'$.

   (c) Die mittlere Teilfigur A_2 besteht aus einem Kreissektor ($A_{KS} = 5^2\pi \cdot \frac{2 \arctan \frac{4}{3}}{360°} \approx 23.2$) und einem „oben eingekerbten Parabelsegment“ ($A_{PS} = 8^2 - \int_0^8 \frac{1}{2}(x-4)^2\,dx - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3$ $= 64 - [\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(x-4)^3]_0^8 - 12 = 30\frac{2}{3}$). $A_2 = A_{KS} + A_{PS} \approx 53.8$. Äussere Teilfiguren: $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}(5^2\pi - A_2) \approx 12.3$.

6. Informative Skizze: *Diagonal*schnitt durch das Prisma (Rechteck; Länge $\sqrt{2}\,a$, Diagonale $2r$). Prismenhöhe $h = h(a) = \sqrt{4r^2 - 2a^2}$, Prismenoberfläche: $A = A(a) = 2a^2 + 4ah$. $A'(a) = 4a + 4(1 \cdot h + a \cdot h') = 4[a + h + a\,\frac{1}{2\sqrt{4r^2-2a^2}} \cdot (-4a)] = 4(a + h - \frac{2a^2}{h}) = 0$, wenn $\frac{2a^2}{h} - a - h = 0$ (quadratische Gleichung in a, negative Lösung unbrauchbar), also wenn $a = \frac{1+\sqrt{1+8}}{\frac{4}{h}} = h = \sqrt{4r^2 - 2a^2}$ (Würfel!), bzw. $a^2 = 4r^2 - 2a^2$, also Kantenlänge $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$. Prismenvolumen $V = a^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}r^3$, Kugelvolumen $V_K = \frac{4}{3}r^3\pi$ und $V : V_K = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \approx 36.8\%$.

7. (a) $f(x) = \frac{x^3-x^2+2}{x^2-2} = \frac{(x+1)(x^2-2x+2)}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$ (im Zähler Nullstelle -1 abspalten), $f'(x) = \frac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2}$, $f''(x) = \frac{4x(x^2+6)}{(x^2-2)^3}$. Punktsymmetrie mit Zentrum $Z(0/-1)$, denn $f(x) = \frac{x^3}{x^2-2} - 1$ und $g(x) = \frac{x^3}{x^2-2}$ ungerade; einfache Nullstelle $x_1 = -1$; Polstellen erster Ordnung $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$; keine Singularitäten. Vertikale Asymptoten mit VZW bei $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$; schiefe Asymptote $y = x - 1$, denn $f(x) = (x^3 - x^2 + 2) : (x^2 - 2) = x - 1 + \frac{2x}{x^2-2}$ (Polynomdivision).
   $f'(x) = 0$ bei $x_4 = 0$ und bei $x_{5,6} = \pm\sqrt{6}$; x_4: Wendepunkt $W(0/-1)$, da x_4 Nullstelle mit VZW von $g(x)$; $x_{5,6}$: $f''(\pm\sqrt{6}) = \pm\frac{3}{4}\sqrt{6}$, also Hochpunkt $H(-\sqrt{6}/-\frac{3}{2}\sqrt{6}-1)$, Tiefpunkt $T(\sqrt{6}/\frac{3}{2}\sqrt{6}-1)$. Graph:



   (b) $\int \frac{x^3-x^2+2}{x^2-2}\,dx = \int (x - 1 + \frac{2x}{x^2-2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|u| + c$ $= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x^2 - 2| + c$

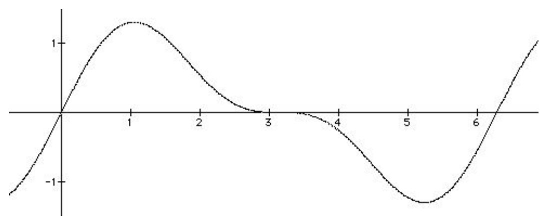
   (c) $A = |\int_{-1}^0 f(x)\,dx| = |[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x^2-2|]_{-1}^0| = |\ln 2 - \frac{3}{2}| = \frac{3}{2} - \ln 2 \approx 0.807$

8. (a) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) = \sin x + \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x = \sin x(1 + \cos x) = 0$ bei $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$. $f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) \cdot 2 = \cos x + \cos(2x) = \cos x + cos^2 x - 1 = 0$ bei x_2, $x_4 = \frac{\pi}{3}$, $x_5 = \frac{5\pi}{3}$ (Substitution $u = \cos x$ führt auf $2u^2 + u - 1 = 2(u+1)(u-\frac{1}{2})$; $u_1 = -1$, $u_2 = \frac{1}{2}$). $f''(x) = -\sin x - \sin(2x) \cdot 2 = -\sin x - 2 \cdot 2 \sin x \cos x = -\sin x(1 + 4\cos x) = 0$ bei $x_1, x_2, x_3, x_6 = \arccos(-\frac{1}{4}) \approx 1.82$, $x_7 = 2\pi - x_6 \approx 4.46$. $f'''(x) = -\cos x - 4\cos(2x)$.

Zeichenerklärung für die folgende Tabelle:
N: Nullstelle; W: Wendepunkt; H: Hochpunkt, lokales Maximum; T: Tiefpunkt, lokales Minimum; m_t: Steigung der (Wende-)Tangente

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	Beschreibung
0	0	2	0	-5	$N_1(0/0)$, W_1 mit $m_t = 2$
π	0	0	0	-3	$N_2(\pi/0)$, W_2 mit $m_t = 0$ (Terrassenpkt.)
2π	0	2	0	-5	$N_3(2\pi/0)$, W_3 mit $m_t = 2$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	0	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$		$H(\frac{\pi}{3}/\frac{3}{4}\sqrt{3})$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{3}{4}\sqrt{3}$	0	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$		$T(\frac{5\pi}{3}/-\frac{3}{4}\sqrt{3})$
1.82	0.726	-1.13	0	3.75	$W_4(1.82/0.726)$ mit $m_t = -1.13$
4.46	-0.726	-1.13	0	3.75	$W_5(4.46/-0.726)$ mit $m_t = -1.13$

(b)

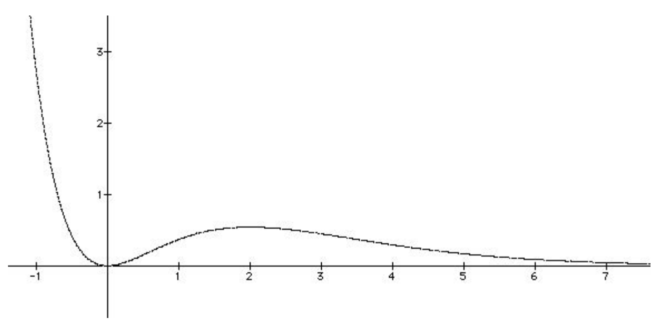


(c) $A = 2\int_0^{\pi} [\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)]\,dx = 2[-\cos x - \frac{1}{4}\cos(2x)]_0^{\pi} = 2[(1-\frac{1}{4}) - (-1-\frac{1}{4})] = 4$

9. (a) $f(x) = x^2 e^{-x} = 0$ bei $x_1 = 0$. $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x} = 0$ bei $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. $f''(x) = (2-2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x} = 0$ bei $x_{3,4} = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$. $f'''(x) = (2x-4)e^{-x} - (x^2 - 4x + 2)e^{-x} = (x^2 - 6x + 6)e^{-x}$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	Beschreibung
0	0	0	2		$N(0/0)$, T
2	0.541	0	-0.271		$H(0/0.541)$
$2-\sqrt{2}$	0.191	0.461	0	-1.57	$W_1(0.586/0.191)$ mit $m_t = 0.461$
$2+\sqrt{2}$	0.384	-0.159	0	0.0931	$W_2(3.41/0.384)$ mit $m_t = -0.159$

(b) Wegen $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0$ ist die x-Achse horizontale Asymptote:



(c) $\int x^2{}_{\downarrow} e^{-x}{}_{\uparrow}\,dx = -x^2e^{-x} + \int 2x_{\downarrow} e^{-x}{}_{\uparrow}\,dx$
$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + c$

(d) Schnittpunkte: $x^2e^{-x} = e^{-x}$, also $(x^2 - 1)e^{-x} = 0$ und $x = \pm 1$
$A = \int (e^{-x} - x^2e^{-x})\,dx = [-e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)]_{-1}^{1} = [(x^2 + 2x + 1)e^{-x}]_{-1}^{1} = \frac{4}{e} \approx 1.47$

(e) $A_{\text{links}} = \int_{-1}^{0} (e^{-x} - x^2e^{-x})\,dx = [(x^2 + 2x + 1)e^{-x}]_{-1}^{0} = 1$
$A_{\text{links}} : A_{\text{rechts}} = 1 : (\frac{4}{e} - 1) = e : (4 - e) \approx 2.12 : 1$

(f) (I) $x^2e^{-x} = \frac{a}{x^2}$, also $a = x^4e^{-x}$. Aus (II) $(2x - x^2)e^{-x} = -\frac{2a}{x^3}$ folgt damit $(2x - x^2)e^{-x} = -2xe^{-x}$, also $2x - x^2 = -2x$, $4x - x^2 = x(4 - x) = 0$. $x = 4$, $a = 4^4e^{-4} \approx 4.69$ und Berührpunkt $B(4/0.293)$. ($x_1 = 0$ ist uninteressant, da dann $a = 0$ und $k_2 : y = 0$.)

10. Halbkreisgleichungen: $y = R \pm \sqrt{x^2 - r^2}$. $V_{\text{rot}} = \pi \int_{-r}^{r} [(R + \sqrt{x^2 - r^2})^2 - (R - \sqrt{x^2 - r^2})^2]\, dx = \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{x^2 - r^2}\, dx = 4R\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{x^2 - r^2}\, dx = 4R\pi \cdot \frac{1}{2}r^2\pi = 2Rr^2\pi^2$

11. (a) Satz der totalen W'keit: $P[R+] = P[R+|A]P[A] + P[R+|B]P[B] + P[R+|AB]P[AB] + P[R+|0]P[0] = 0.85 \cdot 0.42 + 0.8 \cdot 0.1 + 0.75 \cdot 0.04 + 0.85 \cdot 0.44 = 0.841 = 84.1\%$

    (b) Satz von Bayes: $P[AB|R+] = \frac{P[R+|AB]P[AB]}{P[R+]} = \frac{0.75 \cdot 0.04}{0.841} \approx 0.0357 = 3.57\%$

12. (a) Durch Auszählen der $4! = 24$ Permutationen: $P[X = 0] = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$, $P[X = 1] = \frac{7}{24}$, $P[X = 2] = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, $P[X = 3] = 0$ und $P[X = 4] = \frac{1}{24}$

    (b) $\mathrm{E}[X] = \frac{23}{24} \approx 0.958$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{4543}{6912} \approx 0.657$, $\sigma(X) \approx 0.811$

    (c) Y = Anzahl Testpersonen, welche alle Proben richtig zuordnen
    $\sim \mathrm{Bin}(n = 12, p = P[X = 4] = \frac{1}{24})$
    $P[Y > 2] = 1 - (P[Y = 0] + P[Y = 1] + P[Y = 2]) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{12}{k} \cdot (\frac{1}{24})^k \cdot (1 - \frac{1}{24})^{12-k}$
    $= 1 - [(\frac{23}{24})^{12} + \frac{1}{2}(\frac{23}{24})^{11} + \frac{11}{96}(\frac{23}{24})^{10}] \approx 0.0120 = 1.20\%$