

Mathematik-Matura 4SW6 2006, Lösungen

1. a) Symmetrien: keine
(hebbare) Singularitäten: keine

Nullstellen: $(x-1)^3 - 2 = 0$
 $(x-1)^3 = 2$
 $x_1 = \sqrt[3]{2} + 1 \approx 2.26$, einfach

Polstellen: $x_2 = 2$, zweiter Ordnung

Asymptote: $(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) : (x^2 - 4x + 4) = x + 1 + \frac{3x-7}{(x-2)^2}$

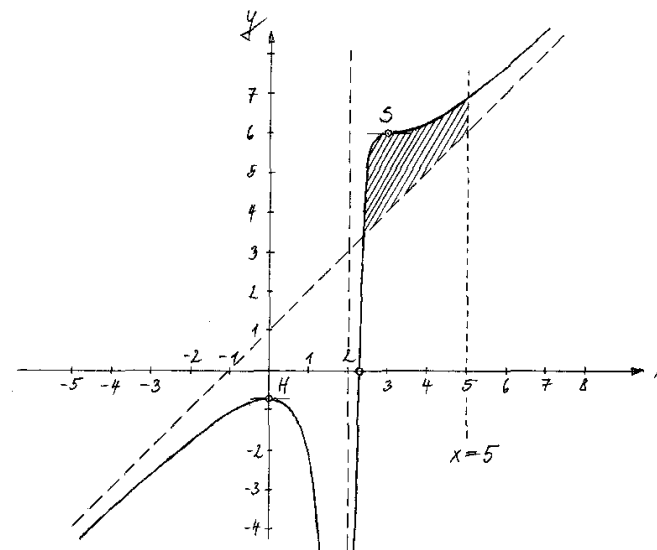
$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 3x - 3 \\ x^3 - 4x^2 + 4x \\ \hline x^2 - x - 4x + 4 \\ x^2 - 4x + 4 \\ \hline 3x - 7 \end{array}$$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x-2)^2 - [(x-1)^3 - 2] \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$
 $= \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{(x-2)^3} = \frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}$
 $f''(x) = \frac{(3x^2 - 12x + 9)(x-2)^3 - x(x-3)^2 \cdot 3(x-2)^2}{(x-2)^6}$
 $= \frac{6(x-3)}{(x-2)^4}$

Extrema: $x_3 = 0, y_3 = -\frac{3}{4}, f''(0) = -\frac{9}{8} < 0$
 also Hochpunkt $H(0 | -\frac{3}{4})$
 $x_4 = 3, y_4 = 6, f''(3) = 0$
 siehe Wendepunkte

Wendepunkte: Terrassen-/Sattelpunkt $S(3/6)$
 (horizontale Wendetangente)

Graph:



b) siehe oben: $f(x) = x + 1 + \frac{3x-7}{(x-2)^2}$

$$A = \int_{\frac{7}{3}}^5 \frac{3x-7}{(x-2)^2} dx \stackrel{u=x-2}{=} \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{3u-1}{u^2} du = \int_{\frac{1}{3}}^3 \left(\frac{3}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du$$

$$u' = 1, \text{ also } dx = \frac{1}{1} du = du$$

$$= \left[3 \ln u + \frac{1}{u} \right]_{\frac{1}{3}}^3 = \underline{\underline{6 \ln 3 - \frac{8}{3}}} \approx 3.93$$

③

2. a) Normalvektor $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ansatz für E: $4x - 5y - 3z + d = 0$

$A \in E: 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + d = 0$, also $d = 10$

E: $4x - 5y - 3z + 10 = 0$

b) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 16 \\ -20 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{256 + 400 + 144}$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{800} = 10\sqrt{2} \approx 14.1$

c) $\alpha = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{36} \cdot 5}$
 $= \arccos \frac{-10}{6 \cdot 5} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx \underline{109^\circ 28'}$

d) Richtungsvektor $\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\omega_\alpha: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $M_c(4/4/2)$, $\vec{CM}_c = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schwerpunkt: $\vec{r}_s = \vec{r}_c + \frac{2}{3} \vec{CM}_c = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 10/3 \\ 4 \end{pmatrix}$

also $S\left(\frac{14}{3} \mid \frac{10}{3} \mid 4\right)$

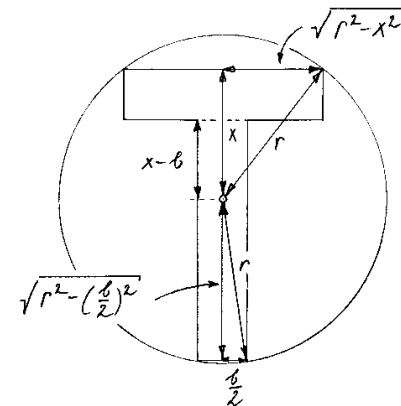
f) HNF(E): $\frac{4x - 5y - 3z + 10}{\sqrt{50}} = 0$

Pyramidenhöhe $h = \left| \frac{4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 10}{\sqrt{50}} \right| = \frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$

Volumen $V = \frac{1}{3} A_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{2} = \underline{4}$

④

3.



$A(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot b + (x - b + \sqrt{r^2 - (\frac{b}{2})^2}) \cdot b$
 $= 4\sqrt{100 - x^2} + 2(x - 2 + 3\sqrt{11})$

$A'(x) = \frac{2b \cdot (-2x)}{2\sqrt{r^2 - x^2}} + b = \frac{-4x}{\sqrt{100 - x^2}} + 2 \stackrel{!}{=} 0$

$2\sqrt{100 - x^2} = 4x$
 $400 - 4x^2 = 16x^2$
 $400 = 20x^2$

$x = \pm \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 ≈ 4.47

$A_{\max} = A(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{100 - 20} + 2(2\sqrt{5} - 2 + 3\sqrt{11})$
 $= 4 \cdot 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 4 + 6\sqrt{11}$
 $= 6\sqrt{11} + 20\sqrt{5} - 4$
 ≈ 60.62

$A_{\text{Kreis}} = r^2 \pi = 100 \pi \approx 314.16$

$A_{\max} : A_{\text{Kreis}} = \frac{3\sqrt{11} + 10\sqrt{5} - 2}{50 \pi} \approx \underline{19.3 \%}$

4. a) $Q \in K: (-3)^2 + 1^2 + 7^2 + 10 \cdot (-3) - 14 \cdot 1 - 6 \cdot 7 + d = 0$
 $d = 27$

quadratisch ergänzen:

$K: x^2 + 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 + z^2 - 6z + 9 + 27 = 25 + 49 + 9$
 $(x+5)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2 = 56$

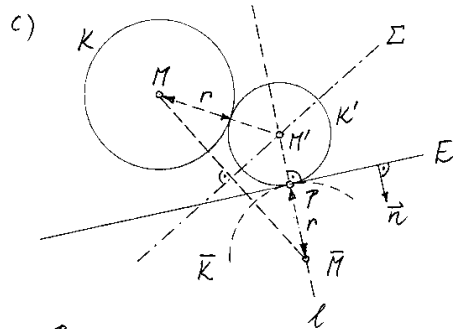
Mittelpunkt $M(-5/7/3)$, Radius $r = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \approx 7.48$

b) $\vec{MQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ansatz für $E_T: x - 3y + 2z + d_T = 0$

$Q \in E_T: -3 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + d_T = 0$, also $d_T = -8$

$E_T: x - 3y + 2z - 8 = 0$



$P \in E: 5 - 2(-1) - 3z_P - 16 = 0$
 $z_P = -3$
 also $P(5/-1/-3)$

Bem:

Einschauen von M in HNF(E) zeigt: Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ weist in den Halbraum, der M nicht enthält!

1. Weg: Mittelnormalebene Σ von $\vec{MM}$ mit Lot l auf E in P schneiden $\rightarrow M'$

$\vec{PM} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 2\sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
 (für zweite Lösung)

„symmetrischer Mittelpunkt“ M' : $\vec{r}_{M'} = \vec{r}_P + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\vec{MM} = \begin{pmatrix} 7+5 \\ -5-7 \\ -9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also

Ansatz für $\Sigma: x - y - z + d_\Sigma = 0$

$M_{MM}(1/1/-3) \in \Sigma: 1 - 1 - (-3) + d_\Sigma = 0$, also $d_\Sigma = -3$

$\Sigma: x - y - z - 3 = 0$

Lot $l: \vec{r} = \vec{r}_P + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ } schneiden!

Durchstoßpunkt: $5+t - (-1-2t) - (-3-3t) - 3 = 0$
 $6t + 6 = 0$
 $t = -1$

Lösung: $M'(4/1/0)$, $r' = \vec{M'P} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14}$

$K': (x-4)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 14$

2. Weg: $M' \in l$ mit $\vec{MM} = \vec{M'P} + r$ bestimmen
 (für zweite Lösung)

$M'(5+t/-1-2t/-3-3t)$

$\vec{MM} = \sqrt{(-5-(5+t))^2 + (7-(-1-2t))^2 + (3-(-3-3t))^2}$
 $= \sqrt{(-10-t)^2 + (8+2t)^2 + (6+3t)^2}$
 $= \sqrt{14t^2 + 88t + 200}$

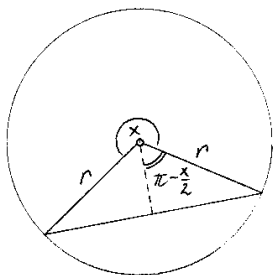
$\vec{M'P} = |t \cdot \vec{n}| = \sqrt{t^2 + (-2t)^2 + (-3t)^2} = \sqrt{14t^2} = \sqrt{14} \cdot |t| = -\sqrt{14} \cdot t$
 da $t \leq 0$ (siehe Bem.)

$\sqrt{14t^2 + 88t + 200} = -\sqrt{14}t + 2\sqrt{14}$ | $\wedge 2$
 $14t^2 + 88t + 200 = 14t^2 - 4 \cdot 14t + 4 \cdot 14$
 $144t = -144$
 $t = -1$

(und Schluss wie bei Weg 1)

(zweite Lösung: $t_2 = -\frac{9}{2}$, $M'_2(\frac{17}{2}/8/\frac{11}{2})$, $r'_2 = \vec{M'_2P} = \frac{9}{2}\sqrt{14}$)

5.



$$\begin{aligned}
 a) \quad A(x) &= A_{\odot} + A_{\Delta} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot r x \cdot r + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \sin(\pi - \frac{x}{2}) \cdot r \cos(\pi - \frac{x}{2}) \\
 &= \frac{1}{2} r^2 x + \frac{1}{2} r^2 \cdot 2 \sin(\pi - \frac{x}{2}) \cos(\pi - \frac{x}{2}) \\
 &= \frac{1}{2} r^2 x + \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin[2 \cdot (\pi - \frac{x}{2})] \\
 &= \frac{1}{2} r^2 (x + \sin(2\pi - x)) \\
 &= \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x) &= 0.7 r^2 \pi \\
 x - \sin x &= 1.4 \pi
 \end{aligned}$$

$$x - \sin x - \frac{7}{5} \pi = 0$$

Newtonverfahren mit $f(x) = x - \sin x - \frac{7}{5} \pi$

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

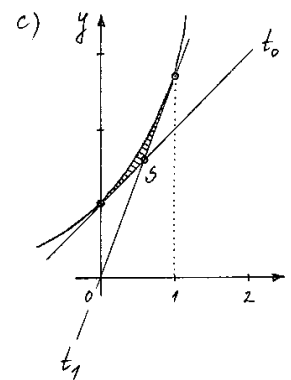
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin x_n - \frac{7}{5} \pi}{1 - \cos x_n} \quad (n \geq 0)$$

(z.B.) $x_0 = 4$
 $x_1 \approx 3.783 \dots$
 $x_2 \approx 3.79238 \dots$
 $x_3 \approx 3.7924004 \dots \approx 217.3^\circ$
 $\alpha \approx \underline{\underline{217^\circ}}$

7

$$b) \quad a) \quad A = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = \underline{e-1} \approx 1.72$$

$$b) \quad V = \pi \cdot \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} (e^2 - 1)}} \approx 10.0$$



$$t_0: \underline{y = x + 1}$$

$$t_1: \underline{y = e \cdot x}$$

d) Schnittpunkt S der beiden Tangenten:

$$\begin{aligned}
 x + 1 &= ex \\
 1 &= x(e-1) \\
 x &= \frac{1}{e-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\frac{1}{e-1}} (e^x - x - 1) dx + \int_{\frac{1}{e-1}}^1 (e^x - ex) dx \\
 &= \left[e^x - \frac{1}{2} x^2 - x \right]_0^{\frac{1}{e-1}} + \left[e^x - \frac{e}{2} x^2 \right]_{\frac{1}{e-1}}^1 \\
 &= \cancel{e^{\frac{1}{e-1}}} - \frac{1}{2(e-1)^2} - \frac{1}{e-1} - 1 + e - \frac{e}{2} - \cancel{e^{\frac{1}{e-1}}} + e \cdot \frac{1}{2(e-1)^2} \\
 &= (e-1) \cdot \frac{1}{2(e-1)^2} - \frac{1}{e-1} + \frac{e}{2} - 1 \\
 &= -\frac{1}{2(e-1)} + \frac{e}{2} - 1 = \underline{\underline{\frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)}}} \approx 0.0682
 \end{aligned}$$

8