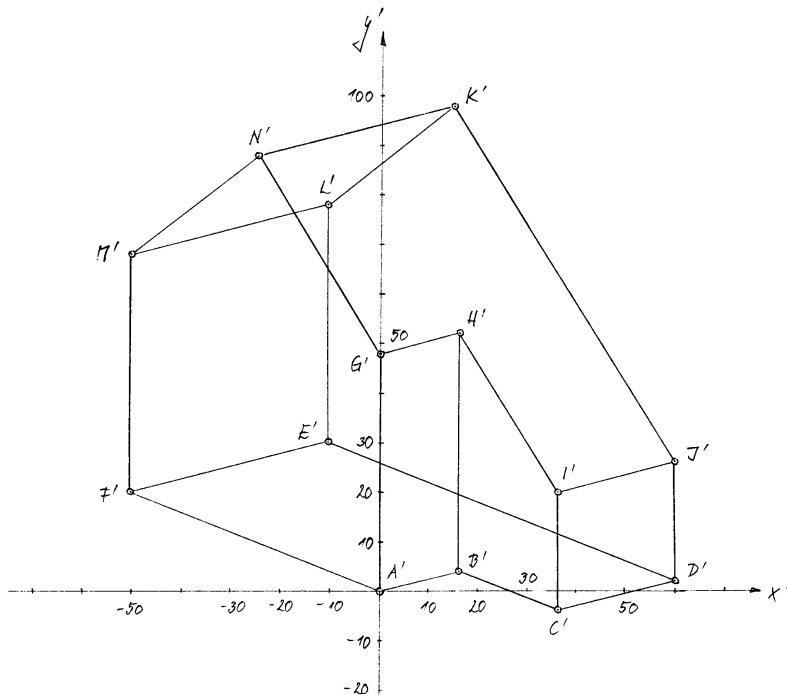


Matura 2008 - Schwerpunktfach

$$\begin{aligned} \underline{1. a)} \quad \vec{e}'_x &= \frac{1}{4} \vec{r}_{B'} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{e}'_y &= \frac{1}{10} \vec{r}_{F'} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{e}'_z &= \frac{1}{8} \vec{r}_{G'} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{e}'_x \\ \vec{e}'_y \\ \vec{e}'_z \end{aligned}} \right\} P = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b) P \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & \dots & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 36 & 60 & \dots & -50 & -25 \\ 0 & 4 & -4 & 2 & \dots & 68 & 88 \end{bmatrix}$$

also $A'(0/0), B'(16/4), C'(36/-4), D'(60/2), E'(-10/30), F'(-50/20), G'(0/48), H'(16/52), I'(36/20), J'(60/26), K'(15/98), L'(-10/78), M'(-50/68)$ und $N'(-25/88)$



$$\underline{2.} \quad (z^5 + 1)^2 (z^3 - 4 \operatorname{cis} 114^\circ) = 0$$

$$z_0 = \operatorname{cis} \left(\frac{1}{5} \cdot 180^\circ \right) = \underline{\operatorname{cis} 36^\circ}$$

$$z_1 = \operatorname{cis} (36^\circ + 1 \cdot 72^\circ) = \underline{\operatorname{cis} 108^\circ}$$

$$z_2 = \operatorname{cis} (36^\circ + 2 \cdot 72^\circ) = \underline{\operatorname{cis} 180^\circ} \quad (= -1)$$

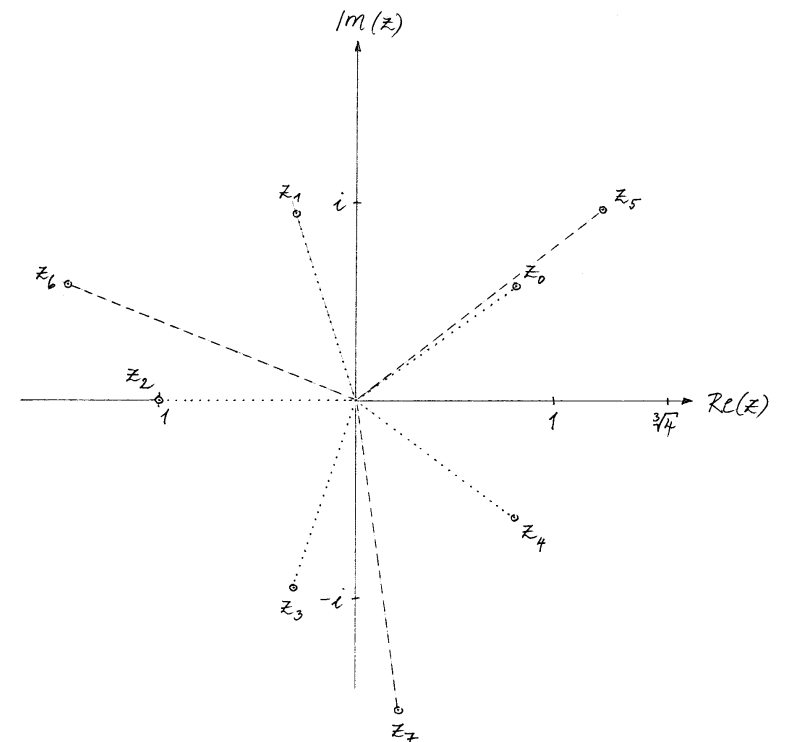
$$z_3 = \operatorname{cis} (36^\circ + 3 \cdot 72^\circ) = \underline{\operatorname{cis} 252^\circ}$$

$$z_4 = \operatorname{cis} (36^\circ + 4 \cdot 72^\circ) = \underline{\operatorname{cis} 324^\circ}$$

$$z_5 = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis} \left(\frac{1}{3} \cdot 114^\circ \right) = \underline{\sqrt[3]{4} \operatorname{cis} 38^\circ} \quad (\approx 1.59 \operatorname{cis} 38^\circ)$$

$$z_6 = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis} (38^\circ + 1 \cdot 120^\circ) = \underline{\sqrt[3]{4} \operatorname{cis} 158^\circ}$$

$$z_7 = \sqrt[3]{4} \operatorname{cis} (38^\circ + 2 \cdot 120^\circ) = \underline{\sqrt[3]{4} \operatorname{cis} 278^\circ}$$



3. Frauen: $\underline{y^f = -0.021775 \cdot x^f + 53.877548}$
 $\underline{c_{xy}^f = -0.974597}$

Männer: $\underline{y^m = -0.006037 x^m + 21.876408}$
 $\underline{c_{xy}^m = -0.957011}$

solve($y^f = y^m, x$) liefert $x \approx 2033.37$,

also würden die Frauen die Männer im April 2033 einholen.

Selbstverständlich sind aber lineare Modelle für die beiden Datensätze völlig unrealistisch!

4. $X = \text{Anzahl richtig gelöster Aufgaben}$

a) $X \sim \text{Bin}(8, p_G)$

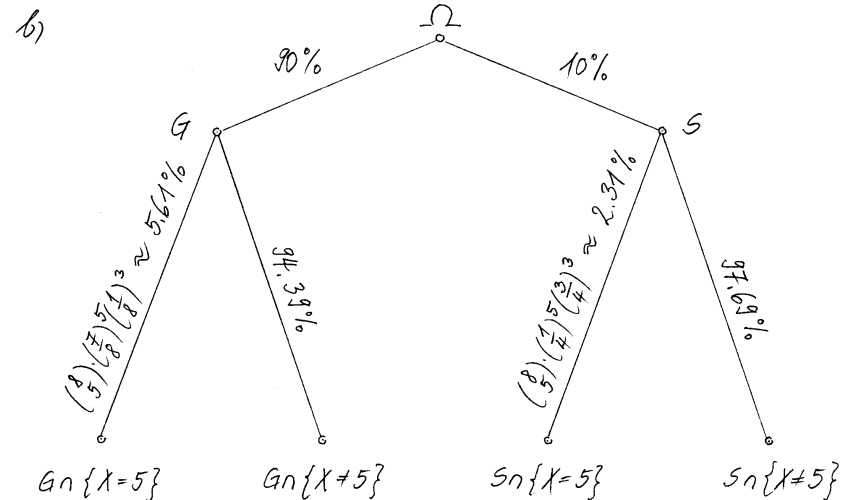
$$L(p_G) = P[X=7] = \binom{8}{7} p_G^7 (1-p_G)^1$$

$$\ell(p_G) = \log L(p_G) = \log\left(\binom{8}{7}\right) + 7 \log p_G + \log(1-p_G)$$

$$\ell'(p_G) = \frac{7}{p_G} - \frac{1}{1-p_G} \stackrel{!}{=} 0$$

$$7(1-p_G) = p_G$$

$$7 = 8p_G, \text{ also } \hat{p}_G = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$



$$\begin{aligned} P[G|X=5] &= \frac{P[G \cap \{X=5\}]}{P[X=5]} \\ &\approx \frac{0.9 \cdot 0.0561}{0.9 \cdot 0.0561 + 0.1 \cdot 0.0231} \\ &\approx \underline{\underline{95.63\%}} \end{aligned}$$

5. a) $T = \text{Anzahl Sechsen} \sim \text{Bin}(200, p)$

$$H_0: p = p_0 = \frac{1}{6}$$

$$H_A: p \neq p_0$$

Annahmebereich $A = \{23, 24, 25, \dots, 43, 44\}$

H_0 wird (bei $T = 29$) beibehalten. Pirat A's Behauptung, sein Würfel sei fair, kann stimmen. A wird zu Unrecht verprügelt.

b) T wie oben

$$H_0: p = p_0 = \frac{1}{8}$$

$$H_A: p \neq p_0$$

Annahmebereich $A = \{16, 17, 18, \dots, 33, 34\}$

H_0 wird wiederum angenommen. Auch B's Vermutung, die 6 trete im Mittel nur bei jedem achten Wurf auf, könnte stimmen.

c) Ausprobieren!

Bei $p_0 = 0.099$ wäre $A = \{\dots, 28\}$, und

bei $p_0 = 0.100$ wäre $A = \{\dots, 29\}$.

Also ist $p_u = 10.0\%$ die untere Grenze des Konfidenzbereichs, also das kleinste p_0 , bei welchem der Test H_0 noch akzeptiert.

Zur Berechnung der (kumulierten) Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:

```
F1- F2- F3- F4- F5- F6-
[Control][0] Var Find... Mode
:binom(x,n,p)
:Func
:bin(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x)
:EndFunc
```

```
F1- F2- F3- F4- F5- F6-
[Control][0] Var Find... Mode
:cbinom(x,n,p)
:Func
:Σ(binom(k,n,p),k,0,x)
:EndFunc
```

MAIN RAD AUTO FUNC

MAIN RAD AUTO FUNC

6. a) linear, 1. Ordnung, inhomogen

$$\text{Variationsansatz: } y(x) = c(x) \cdot e^{2x}$$

$$y'(x) = c'(x) \cdot e^{2x} + c(x) \cdot 2e^{2x} \stackrel{!}{=} 2c(x)e^{2x} + 3x$$

$$c'(x) = 3x \cdot e^{-2x}$$

$$c(x) = -\frac{3}{4}(2x+1)e^{-2x} + C$$

$$\underline{y(x) = C \cdot e^{2x} - \frac{3}{4}(2x+1)e^{2x}}$$

b) linear mit konst. Koeff., 4. Ordnung, homogen

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 15\lambda^2 + 4\lambda + 20 = (\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda+5) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -5$$

$$\underline{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-5x}}$$

c) separierbar

$$\frac{dy}{dx} = x^3 e^{-x}, \text{ also } \int e^x dy = \int x^3 dx$$

$$e^x y = \frac{1}{4} x^4 + C$$

$$\text{allgemeine Lösung: } y(x) = \ln\left(\frac{1}{4} x^4 + C\right)$$

$$\text{AWP: } y(0) = \ln C \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}, \text{ also } C = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$\underline{y(x) = \ln\left(\frac{1}{4} x^4 + \sqrt{e}\right)}$$

d) lineares System, 1. Ordnung, homogen

$$\underline{y'(x) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -9 & 7 \end{bmatrix} \cdot y(x)}$$

$$\text{Eigenwerte: } \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 2 \\ -9 & 7-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda-5)(\lambda+2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2$$

$$\text{Eigenvektoren: } \underline{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \underline{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{allgemeine Lösung: } y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} e^{5x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

$$\text{AWP: } y(0) = \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 \\ 9c_1 + c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ also } 7c_1 = 7, c_1 = 1, c_2 = 3$$

$$\underline{y(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} e^{5x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x}}$$