

Maturitätsprüfungen
Vorbereitungsaufgaben GLF Mathematik

1. Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven $f : y = \frac{1}{x}$ und $g : y = \sqrt{x^2 - 2}$?
2. Die Kurve mit der Gleichung $y^2 = x(1 - \frac{x}{3})^2$ bildet eine Schleife.
 - (a) Berechne die Koordinaten des höchsten und des tiefsten Punktes der Schleife.
Hinweis: Bringe die Kurvengleichung auf die Form $y = \pm f(x)$.
 - (b) Skizziere die Kurve.
 - (c) Berechne den Flächeninhalt innerhalb der Schleife sowie ihre Länge.
3. Ein Kreis k und eine Parabel p (mit senkrechter Symmetrieachse) gehen beide durch die drei Punkte $A(4/0)$, $B(8/8)$ und $C(0/8)$.
 - (a) Wie lauten die Koordinatengleichungen der beiden Kurven?
 - (b) Bestimme die Schnittwinkel.
 - (c) Berechne die Flächeninhalte der drei Bereiche, in welche die Parabel die Kreisfläche teilt.
4. Ein senkrecht Prisma mit einer quadratischen Grundfläche soll in einer Kugel vom Radius r Platz finden. Wie gross muss die Grundkante a gewählt werden, wenn das Prisma eine maximale Oberfläche haben soll, und welchen Anteil (in %) vom Kugelvolumen macht das Prismenvolumen aus?
5. Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2 - 2}.$$
 - (a) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch, und zeichne den Graphen von f .
 - (b) Berechne das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$.
 - (c) Berechne den Flächeninhalt des Bereiches, der von der Kurve, der x -Achse und der y -Achse begrenzt wird.
6. Betrachte die Kurve $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x)$ im Bereich $[0, 2\pi]$.
 - (a) Ermittle alle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Kurve (im Bogenmass).
 - (b) Zeichne die Kurve (x im Bogenmass).
 - (c) Berechne den Flächeninhalt des Bereiches, der von der Kurve und der x -Achse eingeschlossen wird.

7. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- Ermittle die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte des Funktionsgraphen.
 - Skizziere die Kurve mit Hilfe dieser Punkte.
 - Berechne $\int x^2 e^{-x} dx$ (mit partieller Integration).
 - Die Kurve $k_1 : y = e^{-x}$ schliesst mit dem Graphen von f ein endliches Flächenstück ein. Berechne dessen Inhalt.
 - In welchem Verhältnis teilt die y -Achse diese Fläche?
 - Die Kurve $k_2 : y = \frac{a}{x^2}$ berühre den Graphen von f . Berechne den Parameter a und die Koordinaten des Berührungspunktes.
8. Ein Kreis mit Mittelpunkt $M(0/R)$ und Radius $r (< R)$ wird um die x -Achse rotiert. Berechne das Volumen des entstehenden Torus.
9. Die Achse eines geraden Kreiszylinders verläuft durch den Punkt $P(5.5/7/-2)$. Von den längsten Strecken, die in diesem Zylinder Platz haben, besitzt eine die Endpunkte $A(2/1/-4)$ und $B(5/5/8)$. Berechne das Volumen des Zylinders.
10. Gegeben seien zwei Geraden

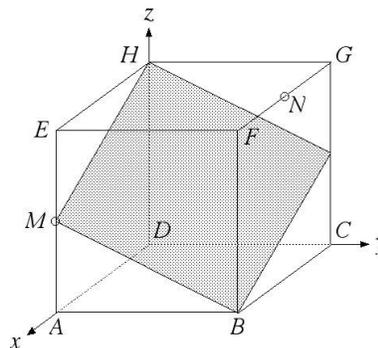
$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : \vec{r} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Punkte $P(6/-2/1)$ und $M(4/-2/5)$. Die Gerade g und der Punkt P liegen in der Ebene E .

- Eine Kugel K_1 mit dem Mittelpunkt M berührt die Ebene E im Punkt B_1 . Stelle die Gleichung von K_1 auf, und bestimme die Koordinaten von B_1 .
 - Eine zu K_1 konzentrische Kugel K_2 berührt die Gerade h im Punkt B_2 . Berechne die Koordinaten von B_2 sowie Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises k von K_2 mit der Ebene E .
 - Wie gross ist der Öffnungswinkel des Kegels mit Grundkreis k und der Spitze M ?
11. Die drei Ursprungsgeraden a, b und c verlaufen durch die Punkte $A(1/2/2)$ bzw. $B(2/1/2)$ bzw. $C(2/2/1)$.
- Berechne die drei Winkel zwischen je zwei Geraden.

Eine Spinne beginnt im Punkt A , ein Netz zu spannen. Sie spannt einen Faden (eine Strecke) vom Punkt A zum am nächsten liegenden Punkt S_1 auf der Geraden b . Von diesem Punkt aus spannt sie den Faden weiter zum am nächsten liegenden Punkt S_2 auf c . Auf die gleiche Art spannt sie den Faden weiter zum Punkt S_3 auf a und wickelt den Faden ohne abzubrechen weiter um die drei Geraden herum.

- (b) Berechne die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 .
- (c) Berechne die Längen der ersten drei Strecken des Streckenzugs, den die Spinne konstruiert hat. Von welcher Art ist die Folge dieser Längen?
- (d) Welche Länge erreicht der Spinnfaden, wenn die Spinne ohne abbrechen weiter-spinnt?
- (e) Wieviele Teilstrecken muss die Spinne mindestens spannen, bis sie mehr als die Hälfte der ganzen Fadenlänge angebracht hat?
12. Der Würfel $ABCDEFGH$ besitzt Kanten der Länge 1. Seine Ecke D liegt im Ursprung und die Ecken A , C und H auf den Achsen des Koordinatensystems. M und N sind die Mittelpunkte der Kanten \overline{AE} bzw. \overline{FG} .



- (a) Eine Lichtquelle im Punkt N sendet einen Lichtstrahl in Richtung des Punktes A aus. Der Lichtstrahl wird an der Ebene E durch die Punkte H , M und B reflektiert. Berechne die Koordinaten des Punktes, in welchem der reflektierte Lichtstrahl die Würfeloberfläche durchstösst.
- (b) Die Ebene E zerlegt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechne den Mittelpunkt und den Radius der grössten Kugel, die im unteren Teilkörper Platz hat.
- Aufgaben zur Trigonometrie: → Zusatzaufgaben Woche 11