

Goniometrie Zusammenfassung und Übungsblatt

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

Funktionen von doppelten und halben Winkeln:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\end{aligned}$$

Rationalisierungsformeln:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \tan \alpha &= \frac{2t}{1 - t^2} \quad \left(t = \tan \frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

Umformungen von Summen in Produkte:

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

Beispiele

zu den *Additionstheoremen*:

1. Berechne die Werte der 4 trigonometrischen Funktionen für

(a) 15° , (b) 75° , (c) 105°

aus den Werten für 30° , 45° und 60° .

2. Berechne:

(a) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$ (b) $\cos(30^\circ + \alpha) - \cos(30^\circ - \alpha)$

(c) $\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)$ (d) $\cos(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha)$

3. Schreibe möglichst einfach:

(a) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$ (b) $\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$

(c) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}$ (d) $\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$

zu *Funktionen von doppelten und halben Winkeln*:

4. Beweise: $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin(2\alpha)}$

5. Beweise: $\tan(45^\circ + \alpha) - \tan(45^\circ - \alpha) = 2 \tan(2\alpha)$

6. Berechne (exakt) $\sin / \cos / \tan / \cot 15^\circ$.

7. Berechne

(a) die Seite s_{12} ,

(b) die Höhe h_{12} des Bestimmungsdreiecks,

(c) die Fläche A_{12}

des regulären 12-Ecks.

8. Berechne $\tan 7.5^\circ$.

zur *Umformung von Summen in Produkte*:

9. Forme um:

(a) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ (b) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$

10. Berechne:

(a) $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$ (b) $\sin 15^\circ - \sin 75^\circ$

11. Berechne durch Addition/Subtraktion der Ergebnisse von oben:

(a) $\sin 15^\circ$ (b) $\sin 75^\circ$