Winkelhalbierende und Apolloniuskreis
Lösungen der Übungsaufgaben

1. Fasse den Berührungspunkt der beiden Teilstrecken auf als inneren Teilungspunkt T_i der durch die beiden anderen Teilstreckenendpunkte gebildeten Strecke $\overline{AB}$. Konstruiere den zugehörigen äusseren Teilungspunkt T_a (d. h. den zu T_i harmonischen Punkt), z. B. mit einem Musterdreieck oder dem zweiten Strahlensatz. Die gesuchte Punktmenge ist der Thaleskreis über T_iT_a, also der Apolloniuskreis:

   1.) g_1 durch A beliebig, $g_2 \parallel g_1$ durch B
   2.) $k(A; \overline{AT_i}) \cap g_1 = \{P_1\}$, $k(B; \overline{BT_i}) \cap g_2 = \{P_2\}$
   3.) $P_1P_2 \cap AB = \{T_a\}$
   4.) Thaleskreis über $\overline{T_iT_a}$

2. Die Konstruktion aus Aufgabe 1. mit den Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{QR}$ liefert einen ersten Apolloniuskreis k_1. Dasselbe mit den Strecken $\overline{QR}$ und $\overline{RS}$ ergibt einen zweiten Apolloniuskreis k_2. $\{T\} = k_1 \cap k_2$.

3. Länge der kürzeren Kathete: $a\,cm$
   Länge der längeren Kathete: $\frac{12}{5}a\,cm$

$$\begin{aligned} a^2 + \left(\frac{12}{5}a\right)^2 &= (12+5)^2 \\ \frac{169}{25}a^2 &= 17^2\,,\ \text{also}\ \frac{13}{5}a = 17 \text{ und } a = \frac{85}{13} \end{aligned}$$

   Länge der kürzeren Kathete: $6\frac{7}{13}\,cm \approx 6.54\,cm$
   Länge der längeren Kathete: $15\frac{9}{13}\,cm \approx 15.69\,cm$

4. Es bezeichne x die gesuchte Länge der Quadratseite.

   Die Hypotenuse wird durch die Quadratdiagonale im Verhältnis $a : b$ geteilt. Der erste Strahlensatz – angewendet auf die Hypotenuse und die Kathete b – liefert also $a : b = x : (b - x)$. Es folgt

$$x = \frac{ab}{a+b}\,.$$

5. Die kürzere Winkelhalbierende misst bekanntlich $\frac{\sqrt{2}}{2}a \approx 0.71a$. Die längere Winkelhalbierende teilt die Kathete im Verhältnis $\sqrt{2}a : a = \sqrt{2} : 1$. Der kürzere der beiden Kathetenabschnitte misst demzufolge $\frac{a}{\sqrt{2}+1}$. Für die gesuchte Länge x der Winkelhalbierenden gilt daher wegen Pythagoras

$$x^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}+1}\right)^2 + a^2 = \frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}a^2 = 2(2-\sqrt{2})a^2$$

   Also misst die längere Winkelhalbierende $\sqrt{2(2-\sqrt{2})}a \approx 1.08a$.