

Rechnen mit (*n*-ten) Wurzeln Zusammenfassung und Übungsblatt

Die *n*-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ aus einer *nichtnegativen* Zahl *a* ist diejenige *nichtnegative* Zahl, deren *n*-te Potenz *a* ist:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a = \sqrt[n]{a^n}$$

Insbesondere ist $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Für $a, b \geq 0$ und $n, m, k \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Wurzelgesetze:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a \cdot b} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0) \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \\ \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}}\end{aligned}$$

Zwei wichtige Anwendungen dieser Regeln:

- Partielles Radizieren:

$$\text{Bsp. } \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64 \cdot 2} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

- Rationalmachen des Nenners:

$$\text{Bsp. } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$$

Beispiele:

1. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$
2. $\sqrt[5]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{3}+1}$
3. $\sqrt[10]{15a^5b^7} : \sqrt[10]{3ab}$
4. $\sqrt[5]{y^{n+5}} : \sqrt[5]{y^{n-5}}$
5. $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b^2})$
6. $(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^k} - \sqrt[n]{y^k})$
7. $\sqrt[3]{500}$
8. $\sqrt[5]{5^{-6}}$
9. $\sqrt[3]{\frac{27}{3^{10}}}$

$$10. \sqrt[3]{a^5}$$

$$11. \sqrt[n]{x^{2n+1}}$$

$$12. \sqrt[a]{p^{2a} + p^a}$$

$$13. \frac{1}{\sqrt[5]{9}}$$

$$14. \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$$

$$15. \frac{1}{\sqrt[n]{x^3}}$$

$$16. \sqrt[10]{\sqrt[10]{10}}$$

$$17. \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^6}}$$

$$18. \sqrt[5]{\sqrt[3]{m^5 n^{10}}}$$

$$19. \sqrt[n-1]{\sqrt[n+1]{y^{2n}}}$$

$$20. (\sqrt[12]{x})^4$$

$$21. \sqrt[4]{25x^2y^6}$$

$$22. \sqrt[n+2]{b^{5n+10}}$$

$$23. \sqrt[5n]{\frac{a^{10}b^5}{c^{20}}}$$

$$24. \sqrt[3]{t^2} \cdot \sqrt[4]{t^3} \cdot \sqrt[6]{t^5}$$

$$25. \sqrt[5]{a} : \sqrt[6]{b^2}$$

$$26. \sqrt[8]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[12]{\frac{y}{x}}$$

$$27. (\sqrt[3]{u})^2 \cdot \sqrt[4]{v^6} \cdot \sqrt{u^2v^3}$$

$$28. \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x^{-1}} \cdot \sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^{-1}} \cdot \sqrt{x^{-1}} \cdot \sqrt{x^{-1}}}$$

$$29. \frac{\sqrt{\sqrt[3]{(\frac{1}{b^2})^{-4}} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}}}{b \cdot \sqrt[6]{b\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b^{-1}} \cdot \sqrt[3]{b^2}}$$