Vollständige Induktion
Zusammenfassung und Übungsblatt

Zum Beweis einer Aussage $A(n)$ über natürliche Zahlen zeigt man, dass

- $A(1)$ wahr ist (*Verankerung*)

und dass

- aus der Annahme, dass $A(k)$ für eine natürliche Zahl k wahr ist, auch die Wahrheit der Aussage $A(k+1)$ folgt (*Vererbungs-* oder *Induktionsschritt*).

Beispiele (aus Algebra 3, OF):

1. Berechne einige Glieder der Folge, suche eine explizite Definition von a_n, und beweise die Formel mit vollständiger Induktion.

   (a) $a_1 = 2\,,\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

   (b) $a_1 = 1\,,\ a_{n+1} = 4a_n + 4^n$

   (c) $a_1 = 0.5\,,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

2. Beweise mit vollständiger Induktion:

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

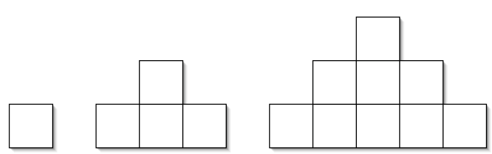
   (c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

3. Die Seitenlänge des kleinsten Quadrates beträgt 1. Suche eine Formel für

   (a) den Flächeninhalt A_n,

   (b) den Umfang U_n

   der n-ten Figur, und beweise sie mit vollständiger Induktion.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

4. Zeige mit vollständiger Induktion:

   (a) $a_1 = 14\,,\ a_{n+1} = 2a_n - 7$; a_n ist durch 7 teilbar.

   (b) $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar.

5. Berechne einige Glieder der Folge, suche eine explizite Definition von a_n, und beweise die Formel mit vollständiger Induktion.

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{24} + \frac{4}{120} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$$

6. Suche das keinste natürliche $n > 1$, für welches gilt:

   (a) $1.1^n > n$

   (b) $3^n < n!$

   Beweise dann mit vollständiger Induktion, dass die Aussage auch für alle grösseren $n \in \mathbb{N}$ gilt.

7. Ungleichung von Bernoulli: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

   (a) Beweise diese Ungleichung für $x > -1$ mit vollständiger Induktion nach n.

   (b) Beweise diese Ungleichung für $x \geq 0$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

   (c) Zeige, dass

$$\left(1 + \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}\right)^{1\,000\,000\,000\,000} \geq 2\,.$$

8. Über $A(n)$ ist Folgendes bekannt: $A(9)$ und $A(20)$ sind wahr. Für $8 \leq k \leq 10$ und für $k \geq 15$, nicht aber für $k = 11$ gilt: Wenn $A(k)$ wahr ist, dann ist auch $A(k + 1)$ wahr. Was lässt sich über $A(8)$, $A(11)$, $A(12)$, $A(18)$ und $A(22)$ sagen?

9. Eine bestimmte Anzahl gleich grosser Kugeln lässt sich zu einem tetraederförmigen Körper aufeinander schichten. Jede Tetraederkante wird dabei durch n sich berührende Kugeln gebildet. Ein solcher Körper heisse K_n. A_n sei die Anzahl Kugeln, aus welchen der Körper K_n besteht.

   (a) Berechne A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5.

   (b) Finde eine Rekursionsformel für A_n.

   (c) A_n ist ein Polynom dritten Grades. Bestimme dieses Polynom und beweise mit vollständiger Induktion, dass es A_n darstellt.