Potenzen mit rationalen Exponenten Zusammenfassung und Übungsblatt

Für $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n, m \in \mathbb{N}$ definiert man

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad \text{und} \quad a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}.$$

Für $a, b > 0$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gelten weiterhin alle Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} \text{PG I:} \quad a^p \cdot a^q &= a^{p+q} \\ \text{PG II:} \quad a^p : a^q &= a^{p-q} \\ \text{PG III:} \quad (a^p)^q &= a^{p \cdot q} \\ \text{PG IV:} \quad (a \cdot b)^p &= a^p \cdot b^p \\ \text{PG V:} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p &= \frac{a^p}{b^p} \end{aligned}$$

Terme mit Wurzeln können also auch als Terme mit Potenzen geschrieben und dann mit den Potenzgesetzen umgeformt werden.

Beispiele:

1. $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$
2. $3^x : 3^{-\frac{1}{2}}$
3. $x^n \cdot x^{\frac{1}{n}}$
4. $\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{y^2}}$
5. $(2^{\frac{1}{2}})^4$
6. $(3^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{4}{5}}$
7. $(2^{-\frac{1}{x}})^x$
8. $(\sqrt{5})^{2n}$
9. $(\sqrt[3]{s^4})^{3n}$
10. $(\sqrt[n]{t^3})^{2n}$
11. $(6x)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$
12. $(2x)^{\frac{2}{3}} : (3x)^{\frac{2}{3}}$

$$13. \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$14. \sqrt[n]{3} : \sqrt[n]{\frac{2}{3}}$$

$$15. (a^{\frac{m}{3}} \cdot a^{\frac{m}{6}}) : a^{\frac{m}{4}}$$

$$16. \sqrt[3]{a^5b} \cdot \sqrt[3]{ab^2}$$

$$17. \sqrt[6]{x^3y^2} : (\sqrt[3]{y^{-2}} \cdot \sqrt[4]{x^2})$$

$$18. \frac{a^6}{b^{m+3}} : \frac{a^8}{b^{m+4}}$$

$$19. \left(\frac{2x^2}{3y^{\frac{3}{8}}}\right)^4 : \left(\frac{9x^{-3}}{4y^{-\frac{3}{4}}}\right)^{-2}$$

$$20. \frac{\sqrt[6]{x^3y^2}}{\sqrt[3]{y^{-2}} \cdot \sqrt[4]{x^2}}$$

$$21. (a^{0.75} : a^{\frac{1}{12}}) : a^{\frac{1}{6}} - (a^{0.75} : (a^{\frac{1}{12}} : a^{\frac{1}{6}}))$$

$$22. [ab^2 \cdot (a^3b)^{\frac{1}{5}} - (ab^2)^{\frac{1}{5}} \cdot a^3b] : (ab)^{\frac{7}{5}}$$

$$23. [(x^7y^3z^2)^{\frac{1}{4}} \cdot (x^3y^5z^4)^{\frac{1}{4}}] : (xyz)^2$$

$$24. 4\sqrt{x} - \sqrt[6]{64x^3} = 6$$

$$25. \sqrt[9]{8x^3} + \sqrt[3]{\frac{x}{4}} - 6 = 0$$

$$26. 4\sqrt[4]{x^2} - 2\sqrt[12]{x^6} = 6$$

$$27. \sqrt[3]{x^2\sqrt{\frac{1}{x}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x\sqrt{x}}} \cdot \sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt{\frac{1}{x}}}}$$

$$28. \frac{\sqrt{x\sqrt{x}} \sqrt{\frac{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \sqrt{\frac{x\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}$$