

Potenzen mit ganzen Exponenten Zusammenfassung und Übungsblatt

Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

(Der Ausdruck 0^0 bleibt undefiniert, denn die Folge $\dots, 0^3 = 0, 0^2 = 0, 0^1 = 0$ würde $0^0 = 0$ nahelegen, die Folge $\dots, 3^0 = 1, 2^0 = 1, 1^0 = 1$ spräche andererseits für $0^0 = 1$.)

Für $a, b \neq 0$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gelten weiterhin alle Potenzgesetze:

$$\begin{array}{lll} \text{PG I:} & a^n \cdot a^m & = a^{n+m} \\ \text{PG II:} & a^n : a^m & = a^{n-m} \\ \text{PG III:} & (a^n)^m & = a^{n \cdot m} \\ \text{PG IV:} & (a \cdot b)^n & = a^n \cdot b^n \\ \text{PG V:} & \left(\frac{a}{b}\right)^n & = \frac{a^n}{b^n} \end{array}$$

Beispiele:

Aufgaben zu den Definitionen:

1. Berechne ohne Taschenrechner.

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } 2^{-1} & \text{b) } 2^{-3} & \text{c) } 3^0 & \text{d) } 5^{-2} & \text{e) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \\ \text{f) } 0.1^{-2} & \text{g) } 10^{-1} & \text{h) } 10^{-2} & \text{i) } (-0.4)^3 & \text{k) } (-0.4)^{-3} \\ \text{l) } 0.4^{-3} & \text{m) } 0.4^3 & \text{n) } (-0.5)^4 & \text{o) } (-0.5)^{-4} & \text{p) } 0.5^{-4} \\ \text{q) } \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} & \text{r) } \left(-\frac{23}{67}\right)^0 & \text{s) } (\sqrt{2})^0 & \text{t) } (\sqrt{2})^{-2} & \text{u) } \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{-4} \\ \text{v) } \sqrt{7^0} & \text{w) } \sqrt{2^{-4}} & \text{x) } \sqrt{(-3)^{-8}} & \text{y) } \sqrt{(-1)^0} & \text{z) } \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - 1^0} \end{array}$$

2. Ebenso.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} & \text{b) } \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ \text{c) } (3 + 3^{-1})^{-2} & \text{d) } (0.1)^{-2} - (\sqrt{10})^4 \\ \text{e) } [(\sqrt{5})^0 + (\sqrt{5})^{-1}]^{-2} & \text{f) } [(\sqrt{11})^{-2} - (\sqrt{13})^{-13}]^0 \\ \text{g) } (-5)^{-4} - 5^{-4} & \text{h) } (-4)^{-3} - 4^{-3} \\ \text{i) } (-3)^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 & \text{k) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \end{array}$$

3. Bestimme die Lösungsmengen.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^{-2} = 4x^0 & \text{b) } x - x^{-1} = 0 & \text{c) } 9x = 16x^{-1} \\ \text{d) } x^0 + 5x^{-2} = 0 & \text{e) } \frac{x}{x^2} = x^{-1} & \text{f) } x^{-2} + x^{-3} = 0 \end{array}$$

4. Schreibe als Zehnerpotenzen.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 0.01 & \text{b) } 0.0001 & \text{c) } \frac{1}{100000} & \text{d) } 1 \\ \text{e) } 1 \text{ Millionstel} & \text{f) } 1 \text{ Billionstel} & \text{g) } 1 \text{ Zehnmillionstel} & \text{h) } 10 \text{ Billionstel} \end{array}$$

5. Schreibe als Dezimalbruch.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 3 \cdot 10^{-2} & \text{b) } 2 \cdot 10^{-3} & \text{c) } 10^{-4} \\ \text{d) } 8.05 \cdot 10^{-3} & \text{e) } 1.763 \cdot 10^{-7} & \text{f) } 9.72 \cdot 10^{-2} \\ \text{g) } 2.2279 \cdot 10^{-6} & \text{h) } 6.7808 \cdot 10^{-5} & \text{i) } 4.02 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

6. Berechne ohne Taschenrechner.

$$\text{a) } (\sqrt{3})^{-2} \quad \text{b) } (\sqrt{2})^{-10} \quad \text{c) } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4} \quad \text{d) } (2\sqrt{6})^{-3}$$

7. Berechne ohne Taschenrechner.

a) 0.25^{-1} b) 0.001^{-2} c) 0.5^{-4} d) $(-0.125)^{-3}$

8. Schreibe als Potenz mit möglichst kleiner natürlicher Basis.

a) $\frac{1}{25}$ b) 0.25 c) $\frac{1}{343}$ d) 0.000125 e) 0.1^5

9. Schreibe mit positiven Exponenten.

a) x^{-2} b) y^{-3} c) $(x+y)^{-4}$ d) $a^{-2} - b^{-2}$
e) $(a-b)^{-2}$ f) $\frac{1}{(a-b)^{-2}}$ g) $\frac{1}{a^{-2}b^{-2}}$ h) $(\frac{a}{b})^{-1}$
i) $(-\frac{a}{b})^{-2}$ k) $(-\frac{a}{b})^{-3}$ l) $1 : a^{-1}$

Aufgaben zu den Potenzgesetzen:

1. Vereinfache ohne Taschenrechner.

a) $2^7 \cdot 2^{-4}$ b) $3^{-10} \cdot 3^6$ c) $5^{28} \cdot 5^{-25}$ d) $2^0 \cdot 2^6$
e) $6^6 \cdot 6^0 \cdot 6^{-5}$ f) $7^3 \cdot 7^{-3}$ g) $10^{-2} \cdot 10^{-1} \cdot 10^0$ h) $0.1^{-4} \cdot 0.1^2 \cdot 0.1^{-1}$
i) $(\frac{3}{5})^6 \cdot (\frac{5}{3})^3$ k) $0.2^{-5} \cdot 5^{-2}$

2. Ebenso.

a) $a^{-2} \cdot a^5$ b) $a^7 \cdot a^{-1} \cdot a^{-4}$ c) $x^{17} \cdot x^0 \cdot x^{-12}$
d) $y^n \cdot y^{1-n}$ e) $u^{2k+1} \cdot u^{k+1} \cdot u^{-2}$ f) $v^{2m-n} \cdot v^0 \cdot v^{n-2m}$
g) $(a+b)^3 \cdot (a+b)^{-1}$ h) $(xy)^2 \cdot (xy)^{-6}$ i) $(p-q)^{-2} \cdot (p-q)^2$

3. Ebenso.

a) $(a^2 + 1) \cdot a^{-1}$ b) $(a^0 + a^1) \cdot (a^{-2} + a^{-3})$
c) $(x^{-1} - 1)(x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + x^0)$ d) $(a^2 + b^{-3}) \cdot a^{-1}b$
e) $(x^2 + y^2)(x^{-2} - y^{-2})$ f) $(x^3 - y^{-3})(x^{-2} + y^2)$
g) $(2m^2 + 5m - 3m^{-2})(4m + 6m^{-3})$ h) $(x^2 - x + 1 - x^{-1} + x^{-2})(1 + x^{-1})$

4. Ebenso.

a) $(3^{-3})^2$ b) $(3^{-2})^3$ c) $(3^3)^{-2}$ d) $(3^2)^{-3}$
e) $(3^{-3})^{-1}$ f) $(4^{-2})^{-2}$ g) $(0.5^{-7})^0$ h) $(0.2^0)^{-8}$

5. Ebenso.

a) $(a^{-5})^0$ b) $(a^{-1})^{-1}$ c) $(a^3)^{-2}$ d) $(a^{-n})^3$ e) $(a^{n-1})^{-n}$

6. Ebenso.

a) $(x + x^{-1})^2$ b) $(y^{-4} + 1)^3$ c) $(a^2 + a^{-2})^2 - (a^2 - a^{-2})^2$

7. Ebenso.

a) $(2 \cdot 3)^4$ b) $(5 \cdot \sqrt{2})^{-4}$ c) $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{-2}$ d) $(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}})^{-3}$

8. Ebenso.

a) $(2a^3b^{-1})^{-4}$ b) $(\frac{x^2y}{z^3})^{-3}$ c) $(64a^{-6}b^7)^0$ d) $(\frac{0.5a^{-4}c^6}{0.2^{-1}})^{-1}$
e) $(abc)^n$ f) $(a^{-n}b^{1+n}c^{-2})^{n-1}$ g) $[\frac{8x^{-k}y^2}{(xy)^{k-1}}]^{k+1}$ h) $\frac{(2x^{-2} \cdot \sqrt{y^{-1}})^{-2n}}{[(\frac{x}{2})^n \cdot y^{n+1}]^2}$

9. Berechne.

a) $2 \cdot 10^{-7} + 7.1 \cdot 10^{-7} - 1.4 \cdot 10^{-7}$
b) $3 \cdot 10^{-7} + 1.2 \cdot 10^{-6}$
c) $0.5 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-2} - 1.5 \cdot 10^{-3}$
d) $0.0001 \cdot 10^{-1} + 0.001 \cdot 10^{-2} - 0.01 \cdot 10^{-3}$