

Integrationsmethoden Zusammenfassung und Übungsblatt

- Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Bsp. 1: $\int x \uparrow \ln x \downarrow dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$

Bsp. 2: $\int \sin^2 x dx = \int \sin x \downarrow \sin x \uparrow dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx$
 $= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx$
 $2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + c$, also $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x \cos x + c$

- Integration durch Substitution

$$\int f(g(x)) dx = \int f(u) \cdot \frac{1}{g'(x)} du$$

Nötigenfalls wird $g'(x)$ mittels der Substitution $u = g(x)$ durch u ausgedrückt. Die Grenzen von bestimmten Integralen müssen mittransformiert werden.

Bsp. 3: $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ (Substitution: $u = \cos x$)
 $= \int \frac{\sin x}{u} \cdot \frac{1}{-\sin x} du = -\int \frac{1}{u} du = -\ln |u| + c = -\ln |\cos x| + c$

- Integration mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

gegebenenfalls Polynomdivision, dann (hier beispielhaft) für einen einfachen und einen k -fachen Pol:

$$\int \frac{p(x)}{(x-x_0) \cdot (x-x_1)^k} dx = \int \left(\frac{A}{x-x_0} + \frac{B_1}{x-x_1} + \frac{B_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-x_1)^k} \right) dx$$

Die Koeffizienten $A, B_1, B_2, \dots, B_k$ werden durch Koeffizientenvergleich bestimmt.

Bsp. 4: $\int \frac{3x^3+5x^2-29x-25}{x^2+x-12} dx = \int (3x+2 + \frac{5x-1}{x^2+x-12}) dx = \int (3x+2 + \frac{5x-1}{(x-3)(x+4)}) dx$
 $= \int (3x+2 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4}) dx = \int (3x+2 + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+4}) dx$
 $= \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2 \ln |x-3| + 3 \ln |x+4| + c$
 $= \frac{3}{2}x^2 + 2x + \ln[(x-3)^2|x+4|^3] + c$

Beispiele:

1. $\int x e^x dx$

2. $\int x^2 e^x dx$

3. $\int_{-1}^3 (2x+1)e^{2x+1} dx$

4. $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-\alpha t} \cos \omega t dt$

5. $\int \frac{3t}{t^2+1} dt$

6. $\int x\sqrt{2x^2+1} dx$

7. $\int_{-1}^1 (2x+1)e^{x(x+1)} dx$

8. $\int_{-a}^a \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) dx$

9. $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x-1} dx$

10. $\int \frac{13-x}{x^2-x-6} dx$

11. $\int_1^3 \frac{x^3+2x+2}{x^2+x} dx$

12. $\int \frac{x^4+1}{x^3-3x+2} dx$