

Folgen und Reihen Zusammenfassung und Übungsblatt

	arithmetische Folge	geometrische Folge
explizite Definition	$a_n = a_1 + (n - 1) d$	$a_n = a_1 q^{n-1}$
rekursive Definition	$a_n = a_{n-1} + d$	$a_n = a_{n-1} q$
zugehörige Reihe	$s_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$ $= na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d$	$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$
Grenzwert der Reihe		$s = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ falls } q < 1$

Beispiele:

- Schreibe mit einem Summenzeichen.

(a) $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^5} + \dots + \frac{1}{s^{17}}$

(b) $\frac{1}{1-x} - \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 - \dots + \left(\frac{1}{1-x}\right)^n$

- Die Zahlen 3 und 5 sind in dieser Reihenfolge die ersten zwei Glieder einer Zahlenfolge (a_n) . Berechne je das Glied a_{100} , wenn die Folge

- eine arithmetische
- eine geometrische

sein soll.

- Wie viele Glieder der arithmetischen Folge $(a_n) = (2, 5, 8, \dots)$ müssen mindestens addiert werden, damit die Summe grösser wird als 1000?
 - Wie viele Zweierpotenzen $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ muss man summieren, bis die Summe erstmals die Zahl 5000 übertrifft?

- Schreibe den periodischen Dezimalbruch $0.0\overline{37} = 0.0373737\dots$ als Grenzwert einer geometrischen Reihe, und gib ihn als gewöhnlichen (gekürzten) Bruch an.

- Der Grenzwert s einer mit $a_1 = \frac{1}{2}$ beginnenden unendlichen geometrischen Reihe ist um $\frac{13}{20}$ grösser als ihr Quotient q . Berechne q .

- Wie viele Glieder der geometrischen Folge $(a_n) = (3, \sqrt{3}, \dots)$ müssen addiert werden, bis sich ihre Summe um weniger als 0.001 vom Grenzwert der Reihe unterscheidet?

7. Ein Ball fällt aus der Höhe h m auf den Boden der Turnhalle und springt nach dem Aufprall auf $r\%$ der ursprünglichen Fallhöhe zurück.
 - (a) Welche Distanz legt der Ball (theoretisch) im gesamten zurück?
 - (b) Welche Zeit benötigt er für diesen Vorgang?
Hinweis: $s = \frac{1}{2}gt^2$ mit $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$
8. Dem Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ wird ein verdrehtes Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ so einbeschrieben, dass seine Ecken die Seiten des ersten Quadrates im Verhältnis $1 : 2$ teilen. Mit dem zweiten und jedem folgenden Quadrat wird gleich verfahren.
 - (a) Berechne die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate.
 - (b) Die Punkte $A_1, A_2, A_3, \dots$ bilden einen spiralförmigen Streckenzug. Berechne dessen Länge.
 - (c) Welches Quadrat hat als erstes einen Flächeninhalt, der kleiner ist als ein Millionstel des ersten Quadrates?
9. In den Einheitskreis werden in einem ersten Schritt drei gleichgrosse Kreise so einbeschrieben, dass sich alle Kreise berühren. Jedem dieser Kreise werden im nächsten Schritt drei weitere Kreise auf dieselbe Art einbeschrieben. Dieser Prozess wird beliebig lange fortgesetzt.
 - (a) Wie viele Kreise sind nach 10 Schritten vorhanden?
 - (b) Welchem Wert nähert sich die Summe aller Kreisflächen?
10. Ein Wohltäter gründet am Anfang eines Jahres eine Stiftung mit einem Kapital von 500 000 Fr. Daraus sollen am Ende jedes Jahres 30 000 Fr. an Bedürftige ausbezahlt werden.
 - (a) Zu welchem Zinsfuss muss das Geld mindestens angelegt werden, damit das Kapital nicht abnimmt?
 - (b) Wie viele Jahre lang kann die Auszahlung erfolgen, falls das Kapital zu 4% Zins angelegt wird?
 - (c) Welcher Betrag darf jährlich ausbezahlt werden, damit bei einem festen Zinsfuss von 4% genau 30 Jahre lang eine Auszahlung erfolgen kann?