Übungsblatt „Lineare Differentialgleichungen“

Regel: $y(x) = e^x$ löst die „Mutter aller Differentialgleichungen“ $y' = y$, denn $(e^x)' = e^x$. Bei linearen Differentialgleichungen lohnt sich deshalb immer ein Versuch mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$.

Beispiele:

Homogene Gleichungen:

1. $y'' + y' + y = 0$ 2. $y'' + 5y' + 4y = 0$

Gleichungen mit Anregungen:

3. $y'' + 5y' + 4y = x^2$ 4. $y'' - 3y' + 2y = e^x$

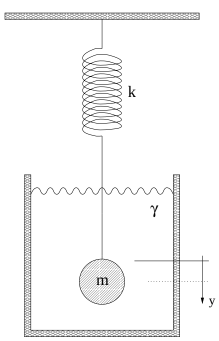
(*Hinweis*: Versuche bei 4. den Ansatz $y_s = axe^x$)

Rand- oder Anfangswertprobleme:

5. $y'' + y' + y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y(\pi/\sqrt{3}) = 0$

6. $y'' + 5y' + 4y = x^2$ mit $y(0) = y'(0) = 0$

7. Gedämpfte Schwingung:



Die Schwingung der Masse im nebenstehenden Bild wird durch die Flüssigkeit gedämpft. Die Bremskraft der Flüssigkeit sei proportional zur Geschwindigkeit der Masse, also $-\gamma\,\dot{y}(t)$.
(γ heisst „Viskosität“ der Flüssigkeit.)

a) Formuliere die Bewegungsgleichung!
b) Löse diese unter der Annahme, dass $\gamma < 2\sqrt{mk}$ (schwache Dämpfung). Verwende $\delta := \frac{\gamma}{2m}$ und $\omega := \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}$.
c) Betrachte den konkreten Fall $m = \frac{1}{2}$, $\gamma = 2$ und $k = 4$.

Regel: Gehe zum Lösen einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und Anfangsbedingungen folgendermassen vor:

- Löse die homogene Gleichung mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$.
- Suche eine (einzige) Lösung y_s der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten oder mit einem geschickten Ansatz. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann
$$\mathbb{L}_{\text{Inhom}} = y_s + \mathbb{L}_{\text{Hom}}.$$
- Setze die Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ein.